MANTIK

ÖNERMELER

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir.Önermeler p,q,r,...vs gibi harflerle ifade edilir. Önermenin doğruluk değerini de **D(1)** veya **Y(0)** ile gösteririz.

ÖNERME	P	P
DOĞRU	D	1
YANLIŞ	Y	0

Örnek: 2+2 =4 İfadesi bir önermedir. Doğrudur. Doğruluk değeri 1 dir.

Örnek: 1=0 ifadesi yanlıştır. Doğruluk değeri 0 dır.

Örnek: Aşağıdaki soruyu çözün. " cümlesi bir önerme değildir.Doğru veya yanlış bir yargı belirtmiyor. "Günaydın arkadaşlar! " cümlesi de bir yargı belirtmez.(Hatta bir cümle bile değildir.) O halde bu iki ifade önerme değildir.
Uyarı: Soru,istek,emir cümleleri önerme olmazlar.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu): Bir p önermesinin değili p' ile gösterilir**.**
eğer **p** doğru ise , **p'** yanlış,
yok eğer **p** yanlış ise **p'** doğrudur.

Örnek: p: 3 bir asal sayıdır. Önermesinin değili
p': 3 bir asal sayı değildir**.**
Doğruluk Tablosu :

p	p'
1	0
0	1

UYARI:Bir önermenin değilinin değili kendisine denktir.(p')' ≡ p
Örnek :
p: "2+2 = 4" ise p' nedir?
Çözüm
p': "2+2 ≠ 4."

İki Önermenin Denkliği : Verilen iki önermenin doğruluk değeri aynı ise bu iki önerme denktir denir.

Örnek: p: " İstanbul'u Fatih Sultan Mehmet fethetti."
q: En küçük asal sayı 2 dir. Önermelerinin denkliğini inceleyelim**.**
Çözüm: p önermesi doğru ve q önermesi doğru olduğundan $p \equiv q$ **olur.**

Örnek: p:19 bir basamaklı bir sayıdır.
q:En büyük doğal sayı 9 dur. Önermelerinin denkliğini inceleyelim**.**
Çözüm: p önermesi yanlış ve q önermesi yanlış olduğundan $p \equiv q$ **olur.**

Örnek: p:En büyük negatif tam sayı -1 dir.
q:Üçgenin iç açıları toplamı 180 derece değildir. Önermelerinin denkliğini inceleyelim.
Çözüm: p önermesi doğru ve q önermesi yanlış olduğundan p≢q olur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. **Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin önerme olduğuna karar ver**.
a) Günaydın!

b) **O çok iyi futbol oynuyor.**
c) **İleri git!**
d) **8 asal sayıdır.**
e) **Bir haftada 7 gün vardır.**
f) **T=2+4**
g) **Hava karlıdır.**
h) **Seni hiç kimse sevmez.**
i) **Herkes bazı insanları sever.**
j) **x<45**
k) **x≥24**
l) **2x-4y<6**

2.) Aşağıdki cümlelerin gerçek değerini bulunuz

a) **Pamuk bir hayvandır.**
b) **Ay bir gezegendir.**
c) **Dünya hareket etmez.**
d) **32<12+6÷2•8**
e) **8=24-8•2**

3.)Aşağıda verilen önerme çiftlerinin biribirine denk olup olmadığını bulunuz.

a) **p: Kelebek bir böcektir.**
q: Gezegenler yıldızdır.
b) **r: Dünyanın rotası ekseni etrafındadır.**
s: Üçgenin alanı iki kenarının çarpımına eşittir.
c) **t: 3<5 k: (x-1)2< 0**

4.) Aşağıdaki önermelerin değillerini bulunuz.

a) **Dünyanın en büyük okyanusu Pasifik okyanusudur.**
b) **4≥3.**
c) **15 asaldır.**
d) **6 Doğal sayıdır.**
e) **6•2<13**
f) **Deniz dalgalıdır**

Bileşik Önermeler:İki yada daha çok önermeden bağlaçlar kullanılarak elde edilen yeni önermeye bileşik önerme denir.

Bağlaç	Sembol
Ve	$\wedge$
Veya	$\vee$
İse	$\Rightarrow$
Ancak ve ancak	$\Leftrightarrow$

Ve ($\wedge$) Bağlacı

İki (p ve q) önermenin Ve ($\wedge$) bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, "p ve q" bileşik önermesi denir ve biçiminde gösterilir. $p \wedge q$ bileşik önermesi, önermelerin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.Bu tanıma göre aşağıdaki eşitlikler yazılır. 1) $P\wedge 0\equiv 0$ 2)$p\wedge 1\equiv p$ 3)$p\wedge p'\equiv 0$ dır.

Örnek 1: p: "Türkiye'nin başkenti Ankara'dır."
q: $"2+3=5"$
önermeleri ile Ve ($\wedge$) bağlacı ile bileşik önermesini oluşturunuz. Doğruluk değerlerini bulunuz.

Yanıt 1: $p \wedge q$: "Türkiye'nin başkenti Ankara'dır ve $2+3=5$ dir." p önermesinin doğruluk değeri 1, q önermesinin doğruluk değeri 1 dir. Öyleyse, $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri $p \wedge q \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olacağından bileşik önermenin doğruluk değeri 1 olacaktır.

Örnek: Ve $(\wedge)$ bağlacının doğruluk tablosunu oluşturunuz

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ve $(\wedge)$ bağlacının özelikleri:

1. **Tek Kuvvet Özeliği**
2. **Değişme Özeliği**
3. **Birleşme Özeliği**

Özellikleri örneklerle açıklanır.

VEYA $(\vee)$ ***BAĞLACI:***

p ve p iki önerme olsun.bu önermelerden ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru olan bileşik önermeye "p veya q" bileşik önermesi denir ve p V q ile gösterilir.Bu tanıma göre şu eşitlikleri yazabiliriz.

1. p V 0 ≡p 2. p V 1 ≡1 3. pV p' ≡1

Veya bağlacının doğruluk tablosu

p	**q**	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Veya $(\vee)$ **bağlacının özelikleri**:

1. **Tek Kuvvet Özeliği**
2. **Değişme Özeliği**
3. **Birleşme Özeliği**

Özellikleri örneklerle açıklanır.

Ve ile veya bağlaçlarının birbiri ile ilişkili özellikleri tablolar yardımıyla örneklendirilir.

De Morgan Kuralı

p ve q önermeleri için Ve $(\wedge)$, Veya $(\vee)$ bağlaçları ile elde edilen bileşik önermeler ve olumsuzları (değilleri) arasında kurulan ilişkiler De Morgan kurallarıdır. Bu kurallar:

1. $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$
2. $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

Kuralları doğruluk tabloları yapılarak gösterilir**.**

Örnek 1: $(\text{Ali okula gitti veya derse girmedi})'$ önermesine denk olan önermeyi bulunuz.

Çözüm: (Ali okula gitti veya derse girmedi. $)' \equiv$ (Ali okula gitmedi ve derse girdi.)

Örnek 2: $\left[(1 \vee 0)' \wedge (0 \wedge 1)'\right]'$ önermesinin dengini bulunuz.

Çözüm: $\left[(1 \vee 0)' \wedge (0 \wedge 1)'\right]' \equiv \left[(1 \vee 0) \vee (0 \wedge 1)\right] \equiv \left[(1) \vee (0)\right] \equiv \left[(1)\right] \equiv 1$ bulunur.

Koşullu Önermeler: p ve q iki önerme olsun.p doğru q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru olan bileşik önermeye " p ise q " bileşik önermesi denir ve "$p \Rightarrow q$" ile gösterilir.

Koşullu önerme, üç durumda **doğru**, bir durumda $(1 \Rightarrow 0)$ **yanlış** olmaktadır.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

<u>Şartlı Önermenin Tersi:</u>

p ⇒q nun tersi ~p ⇒ ~q dir. (~p nin olumsuzu anlamındadır)

Örnek: Aşağıdaki şartlı önermelerin tersini alınız

- A) Eğer x=3 ise 2.x+5=11
- ✓ Eğer x≠3 ise 2.x+3≠11
- B) Eğer 2<5 ise 5≥2
- ✓ Eğer 2≥5 ise 5<2

<u>Şartlı önermenin karşıtı:</u>

$p \Rightarrow q$ nun karşıtı $q \Rightarrow p$ dir.

<u>Şartlı önermenin karşıt tersi:</u>

$p \Rightarrow q$ nun karşıt tersi $\sim q \Rightarrow \sim p$ dir.

Örnek:Aşağıdaki önermelerin karşıt terslerini yazınız.

A)Eğer "2 tamsayı ise 22 de tamsayıdır"
Eğer "22 tamsayı değilse 2 de tamsayı değildir"

B)"Karenin alnı 4cm2 ise bir kenarı 4cm dir"
"Karenin bir kenarı 4cm değilse alanı 4cm2 değildir."

<u>Şartlı önermenin değili:</u>
$(p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$ $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Koşullu önermenin özellikleri
1)$p \Rightarrow p \equiv 1$ 2)$p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p$ 3)$0 \Rightarrow p \equiv 1$ 4)$p \Rightarrow 0 \equiv \sim p$ 5)$1 \Rightarrow p \equiv p$ 6)$p \Rightarrow 1 \equiv 1$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1) p:"Eren çok çalışkandır" ve q:"Esra basketbol oynayamaz" önermeleri veriliyor.Aşağıdakilerden hangisi "Eren tembel ve Esra basketbol oynar" bileşik önermesini ifade eder?
A)$p' \vee q'$ B)$(p' \vee q)$ C)$p \wedge q'$ D)$p' \Rightarrow q'$ E) $p' \wedge q'$

2.) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ ifadesine aşağıdakilerden hangisi denktir?
A) $p \Rightarrow (p \vee q)'$ B) $p \Rightarrow q$ C) $p \vee q'$ D)$p' \Rightarrow q'$ E)$p \Rightarrow q'$

3) $3=5 \Rightarrow 9=25$ şartlı önermesinin değili nedir

4) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \equiv 0$ denkliği verildiğine göre $r' \vee q=$?

5)$q' \wedge (p' \vee r)' \equiv 1$ denkliği verildiğine göre p, q, r nin doğruluk değerlerini bulunuz.

6)$(p \Rightarrow q)' \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv$?

7)$[p \vee (q \wedge r)] \wedge [r\ (p \Rightarrow q)]$ ifadesi neye denktir?

8) Aşağıdaki özelliklerin ispatlarını tablo yaparak gösteriniz

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ b) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ c) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

İki Yönlü Koşullu Önerme(Ancak ve ancak: $\Leftrightarrow$)

$p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerinden oluşan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine iki yönlü köşullu önerme denir.

$p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir. p ile q aynı değere sahip olduğunda doğru diğer durumlarda yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Örnek: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye **çift gerektirme** denir.

Örnek: (x reel sayısı için,$x=1 \Leftrightarrow x^3=1$) ifadesinin çift gerektirme olduğunu gösteriniz

Çözüm: ($x=1 \Rightarrow x^3=1$) ve ($x^3=1 \Rightarrow x=1$)dir. Buna göre $1\wedge 1\equiv 1$ olduğundan önerme çift gerektirmedir.

Örnek: $p \Leftrightarrow q$ önermesinin değilini bulunuz.

Çözüm: $(p \Leftrightarrow q)' \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]'$

$\equiv [(p' \vee q) \wedge (q' \vee p)]'$

$\equiv (p' \vee q)' \wedge (q' \vee p)'$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv (p \wedge q') \vee (q \wedge p')$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv [p \vee (q \wedge p')] \wedge [q' \vee (q \wedge p')]$ ($\vee$ nın $\wedge$üzerine dağılma özelliği)

$\equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee p')] \wedge [(q' \vee q) \wedge (q' \vee p')]$ ($\vee$ nın $\wedge$üzerine dağılma özelliği)

$\equiv [(p \vee q) \wedge 1] \wedge [1 \wedge (q' \vee p')]$ ($p \vee p' \equiv 1$)

$\equiv (p \vee q) \wedge (q' \vee p')$

$\equiv [(p')' \vee q] \wedge (q' \vee p')$

$\equiv (p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')$

$\equiv p' \Leftrightarrow q$ bulunur.

Totoloji: Bir bileşik önerme kendisini oluşturan önermelerin her doğruluk değeri için daima 1 oluyorsa bu bileşik önermeye bir totoloj denir.

Örnek: $p \vee p' \equiv 1$ olduğunu gösteriniz.

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

Örnek: $p \vee (p \wedge q)' \equiv ?$ Tablo yapmadan bulunuz.

$\equiv p \vee (p' \vee q')$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv (p \vee p') \vee q'$ (birleşme özelliği)

$\equiv 1 \vee q'$ ($p \vee p' \equiv 1$)

$\equiv 1$

Çelişki: Bir bileşik önermenin değeri her durumda 0 ise bu bileşik önermeye **çelişki** denir.

Örnek: $p \wedge p' \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

Tabloya göre $p \wedge p' \equiv 0$ dır.

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

Örnek: $(p' \vee q) \wedge (p \wedge q')$ bileşik önermesinin çelişki olduğunu gösteriniz.

$(p' \vee q) \wedge (p \wedge q') \equiv [(p' \vee q) \wedge p] \wedge q'$ (Birleşme Özelliği)

$\equiv [(p' \wedge p) \vee (q \wedge p)] \wedge q'$ (dağılma özelliği)

$\equiv [0 \vee (q \wedge p)] \wedge q'$ ($p' \wedge p \equiv 0$)

$\equiv (q \wedge p)] \wedge q'$ (Değişme ve birleşme öz.)

$\equiv (q \wedge q') \wedge p$

$\equiv 0 \wedge p$

$\equiv 0$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.) p: Kızılırmak Karadeniz'e dökülür.
q:İğne yapraklı ağaçlar,kışın yapraklarını dökmezler.
r: İstanbul Karadeniz bölgesindedir.Önermeleri veriliyor.Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(p\vee q)\Rightarrow r$ B) $p'\Leftrightarrow q'$ C) $(p\Leftrightarrow q')\vee r$ D) $q\vee r$ E) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r')$

2.) Aşağıdaki bileşik önermeleri en sade biçimde yazınız.

a) $(p'\vee q)\Rightarrow p'$
b) $(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$
c) $(p\vee q')\Rightarrow(p'\wedge q)$
d) $(p'\Rightarrow q)\ \wedge(p'\wedge q)'$

3.) $q'\vee(p\wedge q')'$ bileşik önermesinin totoloji olduğunu doğruluk tablosu düzenleyerek gösteriniz.

4.) $p\equiv 0$, $q\equiv 1$ ve $r\equiv 0$ iken $\{[(p=>r)\wedge(p' <=>q)]\ V\ (r' =>p)\}\equiv ?$

5) "Kare bir dörtgendir. $\Leftrightarrow 3+6>5$" önermesinin doğruluk değerini bulunuz

6.) $(p\Leftrightarrow p)\equiv 1$ olduğunu gösteriniz

7.) $(p\Leftrightarrow 1)\equiv p$ ve $(p\Leftrightarrow 0)\equiv p'$ olduğunu gösteriniz.

8.) $(p\Leftrightarrow p')\equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

AÇIK ÖNERMELER

İçinde bilinmeyen (değişken)bulunan ve bu değişkenin aldığı değerlere göre doğru veya yanlışlığı belirlenen önermelere açık önerme denir. Açık önermeler değişkenlere göre ad alırlar.
p(x), p(y),p(x,y),… gibi
Örnek:p(x): "x yırtıcı bir hayvandır." Açık önermesi x=aslan için doğru ve x=tavuk için yanlıştır

Örnek: p(x): x-1=0 ve x doğal sayıdır. açık önermesi x=1 için doğru $x\neq 1$ için yanlıştır.

Örnek: p(x,y): $x^2>y$ önermesi veriliyor.
X=1 ve y=1 için yanlış
x=2 ve y=1 için doğru
x=3 ve y=10 için yanlış

NİCELEYİCİLER

Bazı (∃) Niceleyicisi:

Örnek: Bazı sayılar asaldır. Önermesi doğrudur. Çünkü en az 1 tane asal sayı vardır.

Her (∀) Niceleyicisi: Her niceleyicisi evrensel niceleyicidir. Daima doğru olursa doğrudur.

Örnek:Her x sayısı için x^2 sayısı pozitiftir. Önermesi daima doğru değildir. X=0 için yanlış olduğundan önerme yanlıştır.
Örnek:x doğal sayı olmak üzere aşağıdaki açık önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz
a)$\forall x,x+1>0$
b)$\exists x,2x-1=3$
c)$\forall x,(x+1)^2=x^2+2x+1$
d)$\forall x,x-1>0$
e)$\exists x,\ x^2>5$
Çözüm: a)x in her değeri için doğru
b) x=2 için doğru
c) her x için doğru
d) x=0 ve x=1 için yanlış, yanlış önerme
e) $x\geq 3$ için doğru ,doğru önerme

NİCELEYİCİLERİN OLUMSUZLARI

(∀)'=∃ ve (∃)'=∀

Örnek:[(∃x,x^2+1>0) ve (∀x,x≥1)]'≡?

Çözüm:∀x,x^2+1≤0 veya ∃x,x<1

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümeleri buldurulur.

$p(x)$: "$x \in N$, $x^2 > 10$"

$q(x)$: "$x \in N^+$, $(x+3)x(x-4)(x-7) = 0$"

$r(x)$: "$x \in R$, $2x-1 < 7$"

$s(x)$: " x, Ankara'ya komşu olan bir ilimizdir."

$t(x, y)$: "$x, y \in N$, $x + y = 5$"

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerleri buldurulur. Bu önermeler niceleme sembolleri ile ifade ettirilir. Bu önermelerin değilleri yazdırılır.

p : " Her n doğal sayısı için, n^2 sayısı pozitiftir."

q : " Bazı n doğal sayıları için, $n^2 = n$ dir."

r : " En az bir x doğal sayısı için, $x^2 + 4 = 0$ dır."

s : " Bütün tek doğal sayıların karesi tektir."

3. $p : \exists\, x \in Z$, $3x - 5 = x + 7$ ve $q : \forall\, x \in \{0,1,2\}$, $x^2 < 4$ önermeleri için,

- $p \vee q$
- $p \wedge q$
- $p \Rightarrow q$

bileşik önermeleri yazdırılır ve doğruluk değerleri buldurulur. Bu bileşik önermelerin değilleri yazdırılır.

4 **.** $p(x)$: "$10 < x^2 < 50$" açık önermesinin

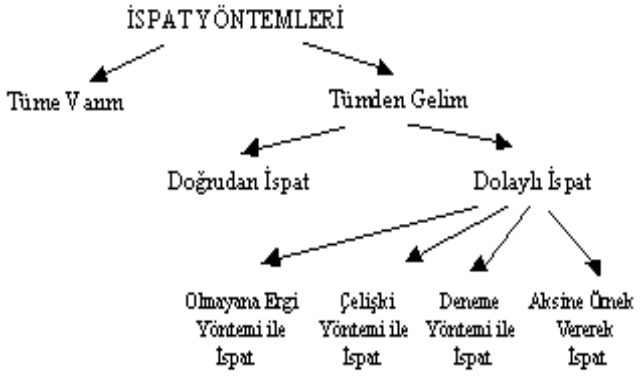
- Doğal sayılarda doğruluk kümesini bulunuz.
- Tam sayılarda doğruluk kümesini bulunuz.

5. $\left[\left(\exists x \in R,\ x^2 \le x\right) \vee \left(\forall x \in R,\ x^2 > 0\right)\right]$ önermesinin olumsuzunu bulunuz.

Bir teoremin verilen kısmına hipotez, ispatlanacak olan kısmına hüküm denildiği belirtilir.
Örnek: "İki çift sayının çarpımı çift sayıdır." teoreminin hipotez ve hükmünü belirlemeleri istenir.

Hipotez (p) : "a ve b çift sayıdır."
Hüküm (q) : "a.b çift sayıdır."
Teorem $(p \Rightarrow q)$: "a ve b çift sayı ise a.b çift sayıdır."

Aksiyom ile teorem arasındaki farkın üzerinde durulur.



İspat yöntemleri yukarıdaki şema ile verilir. Sadece doğrudan ve dolaylı ispat yöntemleri açıklanır.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.)"İki tek sayının toplamı çift sayıdır."
önermesi doğrudan ispat yöntemiyle ispat ediniz.

2.) "Bir doğal sayının karesi çift ise kendisi de çifttir." önermesi olmayana ergi metodu ile ispat ediniz.

3.) $x \in R$ olmak üzere, $(5x+3=23) \Rightarrow (3x+7 \neq 32)$ olduğu çelişki metodu ile ispat ediniz.

4.) $A=\{4,5,6,7\}$ kümesi veriliyor."Her $x \in A$ için $x^2 < 11x-24$" önermesi deneme yöntemiyle ispat ediniz.

5.) "Her asal sayı tek sayıdır."
önermesinin yanlışlığı aksine örnek vererek ispat ediniz.

6.) "$x \neq 3$ ise $5x-2 \neq 13$ dür."
önermesini olmayana ergi metoduyla ispat ediniz.

7.) Tek sayıların karesinin de tek sayı olduğunu ispat ediniz.
(Yol Gösterme: Tek sayılar $n \in Z$ olmak üzere $2n+1$ şeklinde yazılabilir.)

KÜMELER

A. TANIM

Küme, nesnelerin iyi tanımlanmış listesidir.Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir.Kümeyi oluşturan öğelere, kümenin elemanı denir. a elemanı A kümesine ait ise, a $\in$ A biçiminde yazılır. **"a, A kümesinin elemanıdır."** diye okunur. b elemanı A kümesine ait değilse, b $\notin$ A biçiminde yazılır. **"b, A kümesinin elemanı değildir."** diye okunur.Kümede, aynı eleman bir kez yazılır.Elemanların yerlerinin değiştirilmesi kümeyi değiştirmez.A kümesinin eleman sayısı s(A) yada n(A) ile gösterilir.

B. KÜMELERİN GÖSTERİLİŞİ

Kümenin elemanları aşağıdaki şekilde 3(üç) yolla gösterilebilir.

1. Liste Yöntemi

Kümenin elemanları { } sembolü içine, her bir elemanın arasına virgül konularak yazılır.

A = {a, b, {a, b, c}}

s(A) = 3 tür.

2. Ortak Özellik Yöntemi

Kümenin elemanları, daha somut ya da daha kolay algılanır biçimde gerektiğinde sözel, gerektiğinde matematiksel bir ifade olarak ortaya koyma biçimidir.

A = {x : (x in özelliği)}

Burada **"x :"** ifadesi "öyle x ler den oluşur ki" diye okunur.

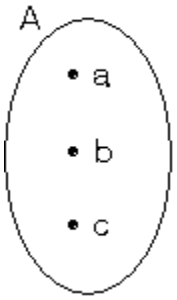
Bu ifade **"x |"** biçiminde de yazılabilir.

3. Venn Şeması Yöntemi

Küme, kapalı bir eğri içinde her eleman bir nokta ile

gösterilip noktanın yanına elemanın adı yazılarak gösterilir.

Bu gösterime Venn Şeması ile gösterim denir.



C. EŞİT KÜME, DENK KÜME

Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. Eleman sayıları eşit olan kümelere **denk kümeler** denir.

A kümesi B kümesine eşit ise A = B,

C kümesi D kümesine denk ise C ≡ D

biçiminde gösterilir.

> Eşit olan kümeler ayın zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.

D. BOŞ KÜME

Hiç bir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.

Boş küme { } yada ∅ sembolleri ile gösterilir.

Eşit olan kümeler ayın zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.

{.} ve {0} kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

{∅} ve {0} kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

E. ALT KÜME - ÖZALT KÜME

1. Alt Küme

A kümesinin her elemanı, B kümesinin de elemanı ise A ya B nin **alt kümesi** denir.

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise $A \subset B$ biçiminde gösterilir.

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise B kümesi A kümesini kapsıyor denir. $B \supset A$ biçiminde gösterilir.

C kümesi D kümesinin alt kümesi değilse $C \not\subset D$ biçiminde gösterilir.

2. Özalt Küme

Bir kümenin, kendisinden farklı bütün alt kümelerine o kümenin **özalt kümeleri** denir.

3. Alt Kümenin Özellikleri

i) Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subset A$

ii) Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subset A$

iii) $(A \subset B$ ve $B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ dir.

ıv) $(A \subset B$ ve $B \subset C)$ ise $A \subset C$ dir.

v) n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n ve özalt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.

vı) n elemanlı bir kümenin r tane $(n \geq r)$ elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-r+1)}{r!} \text{ olur.}$$

vii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n \pm 1} = n$

viii) $\binom{n}{x} = \binom{n}{y}$ ise, $(x = y$ veya $n = x + y)$dir.

ix) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

Etkinlik:

- "MATEMATİK" kelimesinde kullanılan harflerden bir küme oluşturulur. Bu küme liste, Venn şeması ve ortak özellik yöntemleri ile yazdırılır.

- Sayı doğrusu üzerinde, 0 dan 10 a kadar olan doğal sayılar işaretletilir. Bu sayılardan oluşan küme liste yöntemi ile yazdırılıp kümenin eleman sayısı buldurulur. Böylece sonlu küme kavramı fark ettirilir.

- Sayı doğrusu üzerinde, 2, 3, 5, 7, 11 asal sayıları işaretlenir. Bundan sonra kaç tane asal sayının daha işaretlenebileceği sorulur.Buradan hareketle asal sayıların oluşturduğu kümenin elemanlarının sayılamayacağı vurgulanıp sonsuz küme kavramı sezdirilir.

- Sayı doğrusu üzerinde, 2 ile 3 doğal sayıları arasındaki doğal sayılardan bir küme oluşturmaları istenir.Buradan hareketle boş küme kavramı sezdirilir.

- Alt küme, öz alt küme ve kuvvet kümesi açıklanır. Aşağıdaki çalışma kâğıdı dağıtılır.

Küme	Alt Kümeleri	Kümenin Eleman Sayısı	Kümenin Alt Kümelerinin Sayısı
$A = \{\ \}$			
$B = \{a\}$			
$C = \{a,b\}$			
$D = \{a,b,c\}$			
$E = \{a,b,c,d\}$			

- Tablo doldurtulur.
- Bir kümenin eleman sayısı ile alt kümelerinin sayısı arasındaki genel kural buldurulur.

- $F = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin iki elemanlı alt kümelerini yazmaları istenir.

- 127 tane öz alt kümesi olan kümenin eleman sayısı buldurulur.

- A = {P harfi ile başlayan haftanın günleri} ve

$B = \{x : 1 \leq x \leq 3$ ve x doğal sayı$\}$ kümelerini liste yöntemi ile yazmaları istenir.Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denildiği belirtilerek A ile B nin denk kümeler olduğu fark ettirilir ve $A \equiv B$ şeklinde gösterileceği belirtilir.

$C = \{x : x$, 1 ile 5 arasındaki doğal sayılar$\}$ ve
$D = \{x : 4 \leq x^2 \leq 19$ ve x doğal sayı$\}$ kümelerini liste yöntemi ile yazmaları istenir.
C kümesinin her elemanı D kümesinin ($C \subset D$) ve D kümesinin her elemanı da C kümesinin ($D \subset C$) bir elemanı olduğu fark ettirilir. Bu kümelerin eşit kümeler ($C = D$) olduğu belirtilir.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerin kaç tanesinde

- 2 bulunmaz?
- 3 bulunur?
- 2 ve 3 bulunur?
- 2 veya 3 bulunur?

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğuna göre $A \subset K \subset B$ şartını sağlayan kaç tane K kümesi vardır?

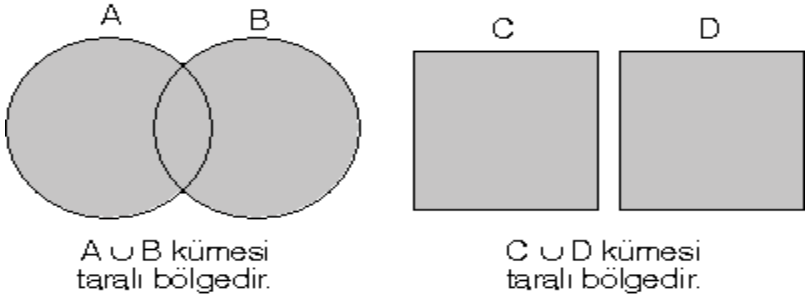
Bir A kümesinin eleman sayısı, bir B kümesinin eleman sayısından 2 fazladır. Bu A kümesinin alt kümelerinin sayısı
B ninkinden 96 fazla olduğuna göre, A kümesi kaç elemanlıdır?

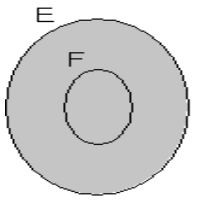
F. KÜMELERLE YAPILAN İŞLEMLER

1. Kümelerin Birleşimi

A nın elemanlarından veya B nin elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **birleşim kümesi** denir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir.

$A \cup B = \{x : x \in A$ veya $x \in B\}$ dir.





$E \supset F \Rightarrow E \cup F = E$ olur.

$E \cup F$ kümesi taralı bölgedir.

2. Birleşim Işleminin Özellikleri

i) $A \cup \varnothing = A$

ii) $A \cup A = A$

iii) $A \cup B = B \cup A$

ıv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

v) $A \subset B$ ise, $A \cup B = B$

vı) $A \cup B = \varnothing$ ise, ($A = \varnothing$ ve $B = \varnothing$) dir.

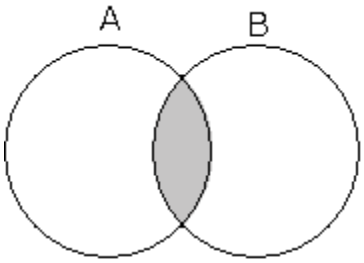
3. Kümelerin Kesişimi

A ve B kümesinin ortak elemanlarından oluşan

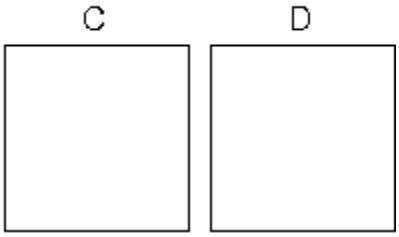
kümeye A ile B nin **kesişim kümesi** denir ve $A \cap B$

biçiminde gösterilir.

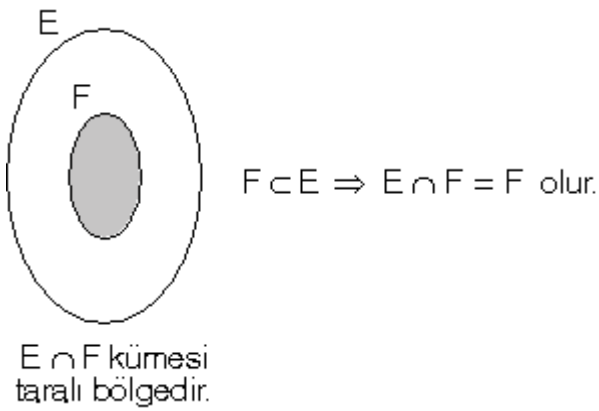
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ dir.



$A \cap B$ kümesi taralı bölgedir.



$C \cap D = \varnothing$
C ile D ayrık kümelerdir.



4. Kesişim Işleminin Özellikleri

i) $A \cap \varnothing = \varnothing$

ii) $A \cap A = A$

iii) $A \cap B = B \cap A$

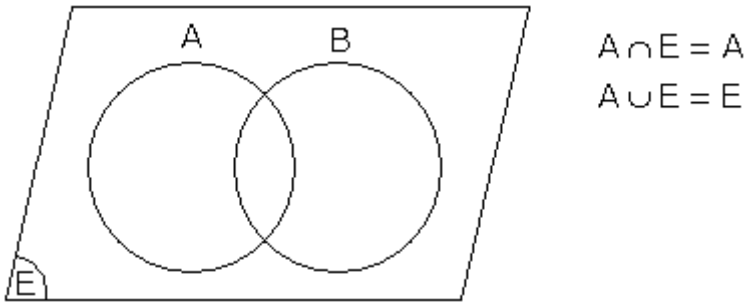
ıv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

vı) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

G. EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan, bütün kümeleri kapsayan kümeye, **evrensel küme** denir. Evrensel küme genellikle E ile gösterilir.



H. BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ

Evrensel kümenin elemanı olup, A kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye A nın tümleyeni denir ve A ya da A' ile gösterilir.

$A = \{x : x \in E \text{ ve } x \notin A, A \subset E\}$ dir.

Tümleyenin Özellikleri

i) $E = \varnothing$

ii) $\varnothing = E$

iii) $(\overline{\overline{A}}) = A$

iv) $A \cup A = E$ ve $A \cap A = \varnothing$ dir.

v) $A \cup B = A \cap B$

vı) $A \cap B = A \cup B$

vıı) $E \cup A = E$ ve $E \cap A = A$ dir.

vıı) $A \subset B$ ise, $B \subset A$ dir.

I. KUVVET KÜMESI

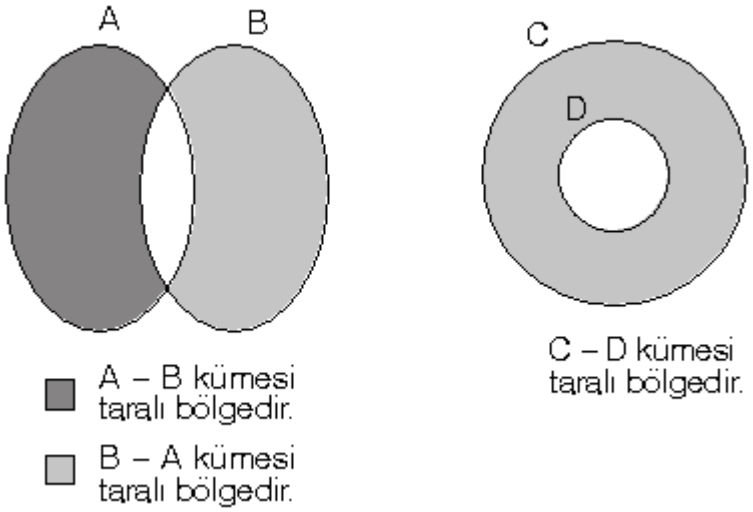
Bir kümenin bütün alt kümelerin kümesine kuvvet kümesi denir. Kuvvet kümesi P(A) ile gösterilir.

$s(A) = n$ ise, $s(P(A)) = 2^n$ dir.

J. İKİ KÜMENİN FARKI

A kümesinde olup, B kümesinde olmayan elemanların kümesine A fark B kümesi denir. A fark B kümesi A – B ya da A \ B biçiminde gösterilir.

$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ dir.



Farkla Ilgili Özellikler

A, B, C kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,

i) $E - A = A$

ii) $A - B = A \cap B$

iii) $A - B = A \cup B$ dir.

ıv) $(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$ (Simetrik Fark)

K. ELEMAN SAYISI

A, B, C herhangi birer küme olmak üzere,

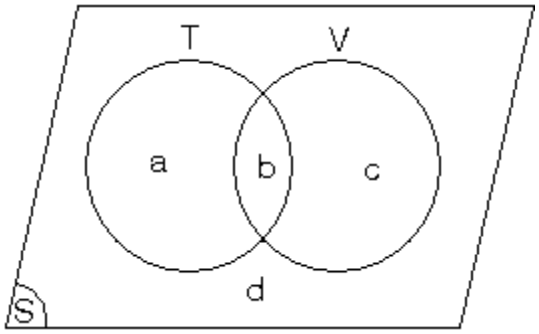
i) $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

ii) $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C)$

$- s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

iii) $s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$

ıv) $a + b + c + d$ tane öğrencinin bulunduğu bir sınıfta voleybol oynayan öğrencilerin sayısı $s(V) = b + c$, tenis oynayan öğrencilerin sayısı $s(T) = a + b$, voleybol ve tenis oynayan öğrencilerin sayısı $s(T \cap V) = b$ olsun.



Tenis veya voleybol oynayanların sayısı:

$$s(T \cup V) = a + b + c$$

Tenis ya da voleybol oynayanların sayısı:

$$s(T - V) + s(V - T) = a + c$$

Sadece tenis oynayanların sayısı:

$$s(T - V) = a$$

Tenis oynamayanların sayısı:

$$s(T) = c + d$$

Bu iki oyundan en az birini oynayanların sayısı:

$$s(T \cup V) = a + b + c$$

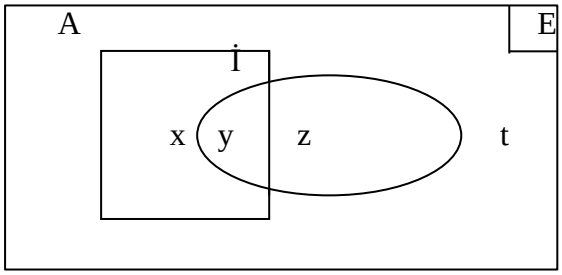
Bu iki oyundan en çok birini oynayanların sayısı:

$$s(A \cap B) = s(A \cup B) + s(T - V) + s(V - T) = d + a + c$$

Bu iki oyundan hiç birini oynamayanların sayısı:

$$s(A \cup B) = d$$

NOT : Küme problemlerinde aşağıdaki pratik şema yöntemini kullanabiliriz.

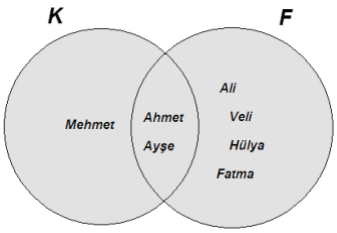


- Sınıfta E = x + y + z + t tane öğrenci vardır.
- A : Almanca bilenlerin sayısı
- İ : İngilizce bilenlerin sayısı
- Sadece Almanca bilenlerin sayısı : x
- Sadece İngilizce bilenlerin sayısı : z
- Almanca bilenlerin sayısı : x + y
- Almanca bilemeyenlerin sayısı : z + t
- İngilizce bilenlerin sayısı : y + z
- İngilizce bilmeyenlerin sayısı : x + t
- Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı : y
- Almanca veya İngilizce bilenlerin sayısı : x + y + z
- Almanca yada İngilizce bilenlerin sayısı : x + z
- Almanca veya İngilizce den <u>en az birini</u> bilenlerin sayısı : x + y + z
- Almanca veya İngilizce den <u>en çok birini</u> bilenlerin sayısı : x + z + t
- Almanca bilip, İngilizce bilmeyenlerin sayısı : x
- İngilizce bilip, Almanca bilemeyenlerin sayısı : z
- Ne Almanca ne de İngilizce bilenlerin sayısı : t
- Sadece bir dil bilenlerin sayısı : x + z
- Sadece iki dil bilenlerin sayısı : y

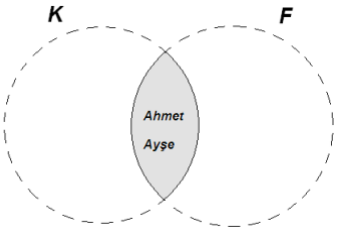
Etkinlik:

Sınıftaki öğrencilere okul korosu ve folklor ekibinde görev alanlar sorulduğunda Ahmet, Ayşe ve Mehmet'in koroda; Ali, Veli, Hülya, Fatma, Ahmet ve Ayşe'nin folklor ekibinde

olduğu tespit edilmiştir. Bu verileri kullanarak en az bir etkinlikte görevli öğrencilerin listesini ve her iki etkinlikte de görevli öğrencilerin listesini şema ile bulmaları istenir.



Birleşim Kümesi



Kesişim Kümesi

- A ve B kümeleri için,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

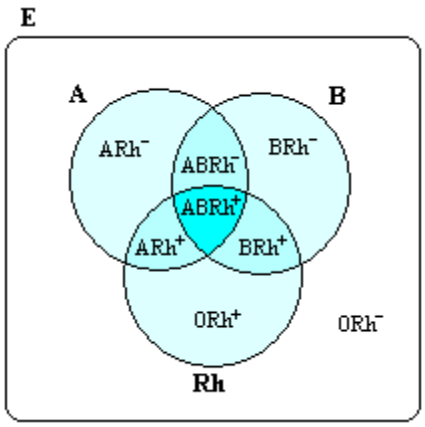
eşitliğini Venn şeması çizerek göstermeleri istenir.

- A, B ve C kümeleri için,

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

eşitliğini Venn şeması çizerek göstermeleri istenir.

- Kan nakillerinde alıcı, vericinin antijenlerinin tamamına sahip olmalıdır. Bir kişide A, B ve Rh antijenlerinden her hangi biri, ikisi veya hepsi olabilir ya da hiçbiri olmayabilir. Bu şekilde mümkün olan sekiz farklı kan grubu, aşağıdaki Venn şeması ile gösterilmiştir. Burada E kümesi dikkate alınan bütün kişileri göstermektedir.

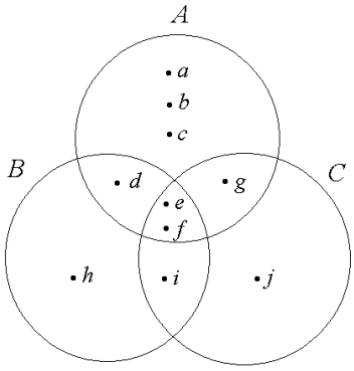


Kan Grupları
ARh^-
ARh^+
BRh^-
BRh^+
$ABRh^-$
$ABRh^+$
$0Rh^-$
$0Rh^+$

Örneğin; kan grubu ARh^- olan bir kişi A antijenine sahiptir, B ve Rh antijenine sahip değildir; $0Rh^+$ olan bir kişi Rh antijenine sahiptir, A ve B antijenine sahip değildir; $ABRh^-$ olan bir kişi A ve B antijenlerine sahiptir, Rh antijenine sahip değildir.

Aşağıdaki her küme için bu sekiz kan grubundan hangilerini içerdiği buldurulur.

- $A \cap Rh = \{\text{ARh}^+, \text{ABRh}^+\}$
- $A \cap B$
- $A \cup Rh$
- $A \cup B$
- $(A \cup B)'$
- $(A \cup B \cup Rh)'$
- $A' \cap B$
- $Rh' \cap A$



Yukarıdaki şemaya göre, aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazmaları istenir.

- $(A \cup B) - (A \cup C)$
- $A - (B \cap C)$
- $(A \cup B) - C$

63 kişilik bir sınıfta, fizik dersinden geçen 44, kimya dersinden kalan 26 kişidir. Her iki dersten geçen 25 kişi olduğuna göre bu derslerin,

- yalnız birinden geçenlerin,
- hiçbirinden geçemeyenlerin

sayısı buldurulur.

30 kişilik bir sınıfta, hem basketbol hem voleybol oynayanların sayısı, basketbol veya voleyboldan en çok birini oynayanların sayısından 2 eksiktir. Bu sınıfta basketbol oynamayanların sayısı 8 ve voleybol oynamayanların sayısı 11 olduğuna göre, bu sporlardan hiçbirini yapmayanların sayısı buldurulur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

$(A \cap B') \cup (A \cap B)$ kümesini en sade biçimde yazınız.

$[A' \cup (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cup B)']$

kümesini en sade biçimde yazınız.

- $s(A)=4$, $s(B)=8$ ve $s(E)=15$ olduğuna göre, $s\left[(B-A)\cup(B'-A)\right]$ kaçtır?

- $(A-B)\cap(A-B')=\varnothing$ olduğunu gösteriniz.

- $(A-B)\cup(A'\cup B)=E$ olduğunu gösteriniz (E, evrensel kümedir.).

A. SIRALI n Lİ

n tane nesnenin belli bir öncelik sırasına göre dü-zenlenip, tek bir nesne gibi düşünülmesiyle elde edilen ifadeye sıralı n li denir.

(a, b) sıralı ikilisinde;

a : Birinci bileşen,

b : İkinci bileşendir.

a $\neq$ b ise, (a, b) $\neq$ (b, a) dır.

(a, b) = (c, d) ise, (a = c ve b = d) dir.

B. KARTEZYEN ÇARPIM

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan bütün sıralı ikililerin kümesine, A ile B nin kartezyen çarpımı denir.

A kartezyen çarpım B kümesi A x B ile gösterilir.

A x B = {(x, y) : x $\in$ A ve y $\in$ B} dir.

A $\neq$ B ise, A x B $\neq$ B x A dır.

C. KARTEZYEN ÇARPIMININ

ÖZELLİKLERİ

i) s(A) = m ve s(B) = n ise

- s(A x B) = s(B x A) = s(A) . s(B) = m . n dir

ii) A x (B x C) = (A x B) x C

iii) A x (B $\cup$ C) = (A x B) $\cup$ (A x C)

iv) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

v) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

vı) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

vıı) $\underbrace{A \times A \times A \ldots \times A}_{n \text{ tane}} = A^n$

NOT:

- $A \times A = A^2$ $\quad$ $A \times A \times A = A^3$

  $R \times R = R^2$ $\quad$ $R \times R \times R = R^3$

  (Analitik düzlem) $\quad$ (öklid uzayı)

Etkinlikler:

$(3x-y,4)=(2,x+y)$ olduğuna göre, (x,y) ikilisi buldurulur.

$A=\{x:-2\le x<1,\ x\in R\}$ ve $B=\{y:1<y<3,\ y\in R\}$ kümeleri için $A\times B$ nin grafiği çizdirilir.

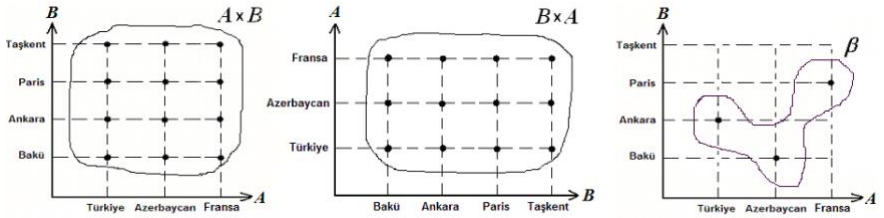
$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$ ve $C=\{3,4,5,6,7,8\}$ olduğuna göre, $(A\times C)\cup(B\times C)$ kümesinin eleman sayısı buldurulur.

A = {Türkiye, Azerbaycan, Fransa}
B = {Ankara, Bakü, Paris, Taşkent}

şeklinde iki kümenin elemanları arasındaki bütün eşlemeler yaptırılır.

$A\times B = \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$
$B\times A = \{(b,a) : b\in B,\ a\in A\}$

olduğu ve bu kümelerin iki küme arasındaki kartezyen çarpımı gösterdiği belirtilir.
Yapılan bu eşlemeleri koordinat düzleminde göstermeleri istenir. $A\times B$ ve $B\times A$ kümelerinin eleman sayıları buldurulur. Hangi eşlemelerde, sırasıyla ülkeler ve başkentlerinin doğru eşlendiğini belirlemeleri istenir. Ülkeler ve başkentleri bağıntısı β koordinat düzleminde gösterilerek liste biçiminde yazdırılır.
β nın $A\times B$ kümesinin bir alt kümesi olduğu fark ettirilir.
$A\times B$ kümesinin ve β bağıntısının grafiğini çizmeleri istenir.



β = {(Türkiye, Ankara), (Azerbaycan, Bakü), (Fransa, Paris)}

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

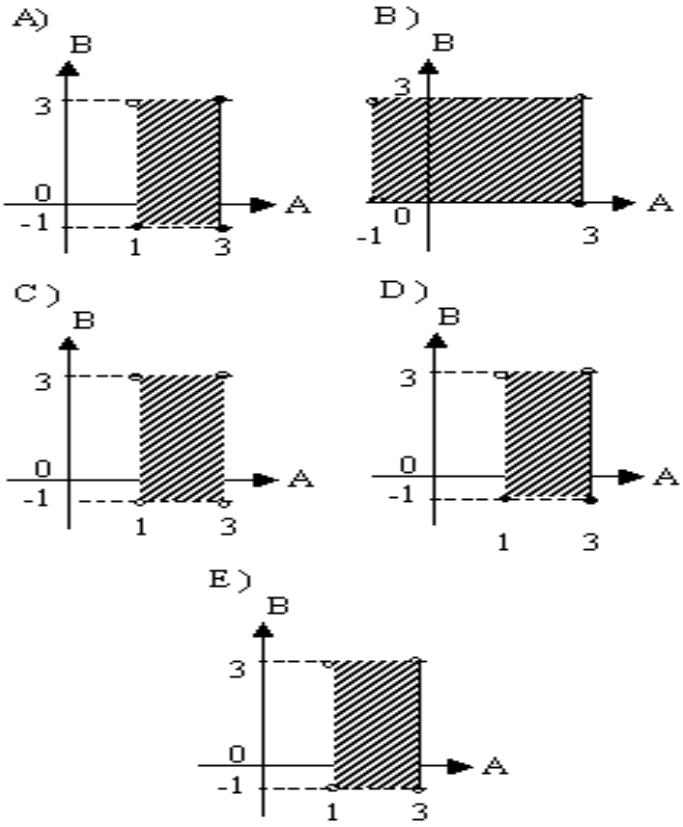
1.

$(x, 7^{-1})=(25y, 7^{x-2})$ olduğuna göre $\sqrt{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5 B) $-\sqrt{5}$ C) 7^{-1} D) 5^{-1} E) 1

2.

A=(1,3], B= (-1,3) kümeleri veriliyor. AxB kartezyen çarpımının grafiği aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?



- A ve B boş olmayan iki küme olsun.A X B kümesinin yazılabilecek tüm alt kümelerinin her birine A' dan B' ye bir **bağıntı** denir.

  $\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \subset A \times B\}$

- A' dan B' ye yada B' den A' ya bağıntı sayısı $2^{s(A \times B)}$ dir.

- A' dan A' ya bağıntıya A' da bağıntı denir.

- $\beta = \phi$ de bir bağıntıdır.

1. Ters Bağıntı

- $\beta = \{(x,y) \mid x \in A\ ,\ y \in B\}$ $\quad (\beta \subset A \times B)$
  $\beta^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \beta\}$ $\quad (\beta^{-1} \subset A \times B)$
- β ve β^{-1}'lerin analitik düzlemde gösterimi köşegene göre simetriktir.

2. Bağıntının özellikleri

YANSIMA ÖZELLİĞİ

- $\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ ise β yansıyandır.
- Analitik düzlemde (Δ = köşegen) $\Delta \in \beta$ ise β yansıyandır.
- s(A) = n olmak üzere, A kümesinde tanımlanabilecek yansıyan bağıntı sayısı şu sekilde hesaplanır:

$$2^{(n^2 - n)}$$

SİMETRİ ÖZELLİĞİ

- $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ ise β simetriktir.
- Analitik düzlemde β simetrik ise β ve β^{-1} aynı kümededir.
- Analitik düzlemde β ; Δ' e göre simetrik ise β simetriktir.
- β bağıntısı simetrik ise $\beta = \beta^{-1}$ olur
- s(A) = n olmak üzere, A kümesinde tanımlanabilecek simetrik bağıntı sayısı şu sekilde hesaplanır:

$$2^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)} \text{ dir.}$$

TERS – SİMETRİ ÖZELLİĞİ

- $x \neq y$ ve $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta^{-1}$ ise β ters-simetriktir.
- β simetrik değilse ters – simetriktir denilemez.
- β bağıntısında (x, x) elemanın bulunması ters simetri özelliğini bozmaz.

GEÇİŞME ÖZELLİĞİ

- $\forall (x,y) \in \beta$ ve $\forall (y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise β geçişkendir.

"[(x, y) $\in \beta$ ve (y, z) $\in \beta$] için (x, z) $\in \beta$ ise,

olmalı

NOT : Eğer β yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahipse β' ya denklik bağıntısı ; eğer β yansıma, ters-simetri ve geçişme özelliklerine sahipse β' ya sıralama bağıntısı denir.

BAĞINTI ÇEŞİTLERİ

1. Denklik Bağıntısı

β bağıntısı A kümesinde tanımlı olsun.

β; Yansıma, Simetri, Geçişme özelliğini sağlıyorsa denklik bağıntısıdır. b denklik bağıntısı ve (x, y) ∈ β ise, x denktir. y ye denir.

x ≡ y biçiminde gösterilir.

b denklik bağıntısı olmak üzere A da a elemanına denk olan bütün elemanların kümesine a nın denklik sınıfı denir.

–a biçiminde gösterilir.

Buna göre, a nın denklik sınıfının kümesi,

–a = {y : y ∈ A ve (a, y) ∈ b} olur.

2. Sıralama Bağıntısı

A kümesinde tanımlı b bağıntısında; Yansıma, Ters simetri, Geçişme özelliği varsa bağıntı sıralama bağıntısıdır.

Etkinlikler:

$(3x-y,4)=(2,x+y)$ olduğuna göre, (x,y) ikilisi buldurulur.

$A=\{x:-2\le x<1,\ x\in R\}$ ve $B=\{y:1<y<3,\ y\in R\}$ kümeleri için $A\times B$ nin grafiği çizdirilir.

$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$ ve $C=\{3,4,5,6,7,8\}$ olduğuna göre, $(A\times C)\cup(B\times C)$ kümesinin eleman sayısı buldurulur.

A = {Türkiye, Azerbaycan, Fransa}

B = {Ankara, Bakü, Paris, Taşkent}

şeklinde iki kümenin elemanları arasındaki bütün eşlemeler yaptırılır.

$A\times B = \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$

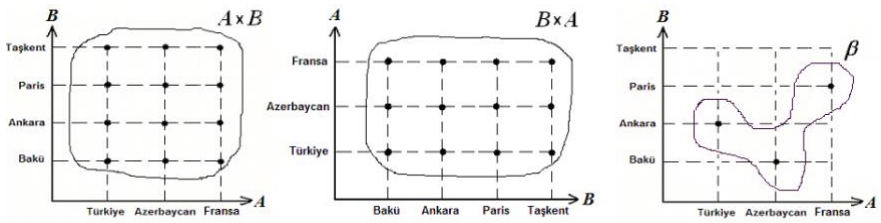
$B\times A = \{(b,a) : b\in B,\ a\in A\}$

olduğu ve bu kümelerin iki küme arasındaki kartezyen çarpımı gösterdiği belirtilir.

Yapılan bu eşlemeleri koordinat düzleminde göstermeleri istenir. $A\times B$ ve $B\times A$ kümelerinin eleman sayıları buldurulur. Hangi eşlemelerde, sırasıyla ülkeler ve başkentlerinin doğru eşlendiğini belirlemeleri istenir. Ülkeler ve başkentleri bağıntısı β koordinat düzleminde gösterilerek liste biçiminde yazdırılır.

β nın $A\times B$ kümesinin bir alt kümesi olduğu fark ettirilir.

$A\times B$ kümesinin ve β bağıntısının grafiğini çizmeleri istenir.



β = {(Türkiye, Ankara), (Azerbaycan, Bakü), (Fransa, Paris)}

[!] Sonlu iki kümenin kartezyen çarpım kümesinin liste yöntemiyle yazılması, şema ile gösterilmesi ve grafiğinin çizilmesi verilir.

[!] $s(A \times B) = s(A).s(B)$ olduğu verilir.

[!] A dan B ye tanımlı bağıntı sayısı = $2^{s(A).s(B)}$ olduğu verilir.

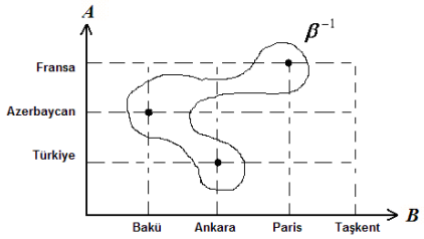
$A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri ile $\beta = \{(x, y) : x^y = 4,\ x \in A\ ve\ y \in B\}$ bağıntısı veriliyor.

β bağıntısını liste biçiminde yazınız.

β bağıntısını şema ile gösteriniz.

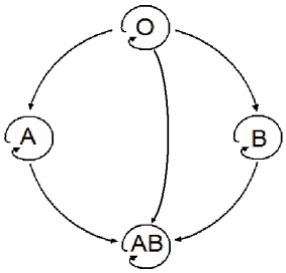
β bağıntısının grafiğini çiziniz.

$B \times A = \{(b, a)\ :\ b \in B,\ a \in A\}$ kümesinin bir alt kümesi olan β^{-1} = {(Bakü, Azerbaycan), (Ankara, Türkiye), (Paris, Fransa)} başkentler ve ülkeleri bağıntısının β bağıntısının tersi olduğu fark ettirilir ve grafiği çizdirilir.



$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinde, $\beta = \{(x, y) : y = 3x,\ (x, y) \in A \times A\}$ olarak tanımlanmıştır. β^{-1} bağıntısını liste biçiminde yazınız.

Şemada kan grupları arasındaki alışveriş akışı gösterilmiştir.



- Bu bağıntı liste yöntemi ile yazdırılır.

- Bu bağıntının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerine sahip olduğu inceletilir.

Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan,
$\beta = \{(x,y) : 4 \mid x-y,\ \ x,y \in Z\}$
bağıntının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerine sahip olduğu inceletilir.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.

A={a,b,c} ,B={b,c,d} kümeleri ve
β ={(a,b),(a, d),(b, c),(c, c),(c, d),(c, a),(b, d)}
kümesi veriliyor.
β kümesinden hangi ikili atılırsa ; β,
A`den B`ye bir bağıntı olur.

A)(a,d) B)(c,a) C)(b,d)
D)(b,c) E)(c,c)

2.

β={(x,y) | (m-2)x + 4y –1 = 0} bağıntısı
simetrik bir bağıntı olduğuna göre m
kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

3.

A={1, 2,4,6,7,9} kümesinde tanımlı
β = {(x,y) : x= 2y -1} bağıntısı veriliyor.
β bağıntısının tersi aşağıdakilerden
hangisidir?

A){(1,2),(4,9)} B){(2,2),(7,4)}
C){(1,1),(4,7)} D){(1,1),(7,4)}
E){(1,2),(4,7)}

4.

β={(x,y) | (m-2)x + 4y –1 = 0} bağıntısı
simetrik bir bağıntı olduğuna göre m
kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

MUTLAK DEĞER

- Bir sayının, sayı doğrusunda belirttiği noktanın “0” noktasına olan uzaklığına, bu sayının mutlak değeri denir.

Mutlak Değerin Özellikleri

1. $|x|=a \Rightarrow$ x=a veya x=(-a) dır.
2. $|a.b| = |a|.|b|$
   $|a:b| = |a|:|b|$ $(b\neq 0)$
   $|a^n| = |a|^n$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$

ÖRNEK : $|2x-3|=5$ eşitliğini sağlayan x değerleri çarpımı kaçtır?

Mutlak Değerli Eşitsizliklerin Çözümü

- Mutlak değerli bütün sorularda sadece aşağıdakileri bilmemiz yeterlidir.

1. $|x| < a \Rightarrow$ -a<x<a dır.
2. $|x| > a \Rightarrow$ x>a veya –x>a dır.

[!] Sonuçlar ve Özellikler:

$x, y \in R$ ve $a, b \in R^+$ için,

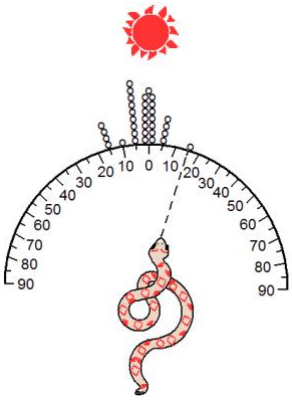
- $|x| = a \Rightarrow (x = a \vee x = -a)$
- $|x| \geq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \vee x \leq -a)$
- $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow (a \leq x \leq b \vee -b \leq x \leq -a)$
- $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$
- $|x^n| = |x|^n$ $(n \in Z^+)$

olduğu verilir.

[!] Bir gerçek sayının, sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün başlangıç noktasına olan uzaklığına, bu gerçek sayının mutlak değeri denildiği belirtilir.

Birinci dereceden denklemlerin çözüm kümelerinin bulunması gerçek sayılarda işlendiğinden burada yeniden değinilmemiştir.

Etkinlik:



Bir cins zehirli çıngıraklı yılanın ısıya duyarlı organı $0,0025°C$ lik ısı değişimini fark edebilmektedir. Bu yılan kafasını ileri ve geri hareket ettirerek karanlıkta bile sıcak avın yerini belirleyebilmektedir.

Bu yılanın ısıyı algılama duyarlılığını test edebilmek için bir biyolog, yılanın gözlerini bağlayarak yılana sıcak bir hedef sunmuştur.

Şekilde görüldüğü gibi 34 saldırının 15 inde yılan hedefi bulmuştur. 6 saldırıda ise yılan hedeften $5°$ den fazla sapmıştır.

Yılanın hedeften sapma açısı, derece cinsinden A ile gösterilsin. Bu durumda; $A=0$ değeri yılanın doğrudan hedefe yönelmesini, A nın pozitif değerleri hedefin sağına, negatif değerleri ise hedefin soluna doğru yönelmesini gösterir.

Şekli kullanarak 34 saldırının olduğu aralığı tanımlayan bir mutlak değer eşitsizliği yazmaları istenir.

Şekilden yılanın hedeften her iki yönde de $15°$ den fazla sapmadığını görebiliriz. Bu durum,

$-15 \le A \le 15$ veya $|A| \le 15$

biçiminde gösterilebilir.

Aracınızın soğutma sistemine yeterli miktarda antifriz ekleyerek donma noktasını $-35°C$ ye düşürebilir ve kaynama noktasını $125°C$ ye yükseltebilirsiniz. Sıcaklık Selsiyus derece cinsinden $-35 < C < 125$ eşitsizliğini sağladığı sürece, soğutucu sistemdeki karışım sıvı olarak kalacaktır.

- $-35 < C < 125$ eşitsizliğini, bir mutlak değer eşitsizliği biçiminde yazmaları istenir.
- $-35 < C < 125$ eşitsizliğini $C = \frac{5}{9}(F-32)$ formülünü kullanarak Fahrenheit derece cinsinden ifade etmeleri istenir.
- $$\begin{aligned} -35 &< C < 125 \\ -35-r &< C-r < 125-r \qquad -(-35-r) = 125-r \Rightarrow r=45 \\ -35-45 &< C-45 < 125-45 \\ -80 &< C-45 < 80 \\ |C-45| &< 80 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} -35 &< C < 125 \\ -35 &< \frac{5}{9}(F-32) < 125 \\ -63 &< F-32 < 225 \\ -31 &< F < 257 \end{aligned}$$

Okul Adı	Okul Kontenjanı
Samsun Atatürk A.L.	90

Huriye Süer A.L.	90
Samsun A.L.	210
Samsun M.P.A.L.	90
Tülay Başaran A.L.	120
Alaçam A.L.	60
Bafra A.L.	120
Çarşamba A.L.	150
Havza A.L.	60
19 Mayıs A.L.	60
Terme A.L.	60
Vezirköprü A.L.	90

Yukarıdaki tabloda 2002-2003 yılı Samsun'daki Anadolu Liselerinin hazırlık sınıfı kontenjanları verilmiştir. *N* sayısı, okullardaki hazırlık sınıfı kontenjanlarını göstermek üzere tabloya göre *N* nin değişim aralığı, eşitsizlik biçiminde ifade ettirilir ve bu eşitsizliğe karşılık gelen mutlak değer eşitsizliği buldurulur.
N nin değişim aralığı $60 \le N \le 210$ biçimindedir. Bu eşitsizliğe karşılık gelen mutlak değer eşitsizliği ise $|N-135| \le 75$ dir.

- $||x+3|-2|=1$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.
- $4|3x-1|-22=-2$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.
- $|2x-3| \le |2x+1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesi buldurulur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

- $|x+2|+2x=11$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- $|x-1| \le 3$ ve $3x+y=4$ ise y nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

ÜSLÜ SAYILAR

[!] Özellikler:

$a,b \in R$ ve $m,n \in Z^+$ için,

- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $a^n.b^n = (a.b)^n$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \ne 0)$

  $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \qquad (b \ne 0)$

[!] Üslü Sayıların Eşitliği:

- $a \notin \{-1,0,1\}$ olmak üzere,

  $$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$
- $n \ne 0$ olmak üzere,

$$a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} a = b \ , \ n \text{ tek ise} \\ a = \mp b, \ n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğu verilir.

- $2^x - 3.2^{x-1} + 5.2^{x+1} = 76$ denklemini çözünüz.

- $\left.\begin{array}{l} 9^x = 32 \\ 8^y = 81 \end{array}\right\}$ ise $x.y$ kaçtır?

ÜSLÜ İFADELER

a $\in$R ve n $\in$ N^+ olmak üzere,

$$a^n = a.a.a. \ldots .a$$

şeklindeki n tane a nın çarpımına, **üslü ifadeler** denir ve <u>a nın n inci kuvveti</u> şeklinde okunur.

<u>Örnekler:</u>

$a^1 = a$	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$(2/5)^1 = 2/5$
$a^2 = a.a$	$1^2 = 1.1 = 1$	$2^2 = 2.2 = 4$	$(2/5)^2 = 4/25$
$a^3 = a.a.a$	$1^3 = 1.1.1 = 1$	$2^3 = 2.2.2 = 8$	$(2/5)^3 = 8/125$

Üslü Sayıların Özellikleri:

1. *Sıfırdan farklı bir sayının, sıfırıncı kuvveti 1 dir. Yani, a ¹ 0 iken, $a^0 = 1$ dir.*

<u>Örnekler:</u>

$1^0 = 1$	$1000^0 = 1$
$2^0 = 1$	$(-5/7)^0 = 1$
$(1/2)^0 = 1$	$(-5)^0 = 1$

2. *Herhangi bir sayının 1 inci kuvveti, o sayının kendisine eşittir. Yani,*

$$a^1 = a \text{ dır.}$$

<u>Örnekler:</u>

$0^1 = 1$	$(1/2)^1 = 1/2$
$1^1 = 1$	$(-5/2)^1 = -5/2$
$2^1 = 2$	$(-3)^1 = -3$

3. *Tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımı, ortak taban alınıp üslerin toplamı alınarak bulunur. Yani,*

$$a^m . a^n = a^{m+n} \text{ dir.}$$

<u>Örnekler:</u>

$2^3 . 2^2 = 2^5 = 32$
$(-5)^2 . (-5) = (-5)^3 = (-)^3 . 5^3 = -5^3 = -5.5.5 = -125$
$(1/2)^4 . (1/2) = (1/2)^5 = (1/2).(1/2).(1/2).(1/2).(1/2) = 1/32$

4. *Tabanları aynı olan iki üslü sayının bölümü, ortak taban alınıp payın üssünden paydanın üssü çıkarılarak bulunur. Yani,*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Örnekler:

$\frac{3^5}{3^2} =$ $3^{5-2} = 3^3 = 3.3.3 = 27$

$\frac{10^5}{10^4} =$ $10^{5-4} = 10^1 = 10$

$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{56}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{54}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{56-54} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

5. *Üslü bir sayının kuvvetini almak için, taban alınıp üs ile kuvvetin çarpımı üs olarak alınmalıdır. Yani,*

$$(a^m)^n = a^{m.n} \text{ dir.}$$

Örnekler:

$(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{23} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

6. *Tabanları farklı üsleri aynı olan iki üslü sayının çarpımı, tabanlarının çarpımı yapılıp üs olarak ortak üs alınmalıdır. Yani,*

$$a^m . b^m = (a . b)^m \text{ dir.}$$

Örnekler:

$2^3.5^3 = (2.5)^3 = 10^3 = 10.10.10 = 1000$

$3^{100}.5^{100} = (3.15)^{100} = 15^{100}$

7. *Tabanları farklı üsleri aynı olan iki üslü sayının bölümü, önce tabanları bölünüp sonra da üs olarak ortak üs alınarak yapılmalıdır. Yani,*

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Örnekler:

$$\frac{10^{200}}{5^{200}} = \left(\frac{10}{5}\right)^{200} = 2^{200}$$
$$\frac{15^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2 = 25$$

8. *$a^{-m} = 1/a^m$ ve $1/a^{-m} = a^m$ dir.*

<u>Örnekler:</u>

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

9. *$(a/b)^{-m} = (b/a)^m = b^m/a^m$ dir.*

<u>Örnek:</u>

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

10. *Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılar, kendi aralarında toplanıp çıkarılabilir. Yani,*

$$x.a^n \pm y.a^n = (x \pm y).a^n \quad dir.$$

<u>Örnekler:</u>

$2.5^7 + 3.5^7 = (2+3).5^7 = 5.5^7 = 5^1.5^7 = 5^{1+7} = 5^8$

$2.3^4 + 5.3^4 - 3.3^4 = (2+5-3).3^4 = 4.3^4 = 4.81 = 324$

11. *$a = b$ ise, $a^n = b^n$ dir.*

<u>Örnek:</u>

$x = 5$ ise, $x^2 = 5^2$ dir. Dolayısıyla, $x^2 = 25$ dir.

12. *Bir a sayısı, 0, 1, -1 den farklı olmak üzere,*

$a^m = a^n$ ise, $m=n$ dir.

<u>Örnekler:</u>

<u>Örnek 1:</u> $25^x = 5$ ise, x kaçtır?

$(5^2)^x = 5$ Þ $5^{2x} = 5^1$ Þ $2x = 1$ Þ $x = 1/2$ olur.

<u>Örnek 2:</u> $32^x = 8$ ise, x kaçtır?

$(2^5)^x = 2^3$ Þ $2^{5x} = 2^3$ Þ $5x = 3$ Þ $x = 3/5$ olur.

Örnek 3: $9^x/3 = 27$ ise, x kaçtır?

$9^x = 3.27$ Þ $9^x = 3^4$ Þ $(3^2)^x = 3^4$ Þ $3^{2x} = 3^4$ Þ $2x = 4$ Þ $x = 2$ bulunur.

13. *$a^n = b^n$ iken,*

i. n çift sayı ise, a=b veya a= -b dir.

ii. n tek sayı ise, a=b dir.

Örnek: $(x+5)^2 = 4$ ise, x kaçtır?

$(x+5)^2 = 2^2$ olduğundan, x+5 = 2 veya x+5 = -2 olur. Buradan, x= -3 veya x= -7 bulunur.

Örnek: $(x-8)^3 = 125$ ise, x kaçtır?

$(x-8)^3 = 5^3$ olduğundan, x-8 = 5 olur ve buradan x= 13 bulunur.

14. *1 sayısının herhangi bir kuvveti, 1 dir. Yani, $1^n = 1$ dir.*

Örnekler:

$1^0=1$, $1^2=1$, 1^{-3}, $1^{1/2}=1$

ÖRNEKLER

Örnek 1: $9.(-3)^2$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $9.(-3)^2 = 9.(1/(-3)^2) = 9.(1/9) = 1$

Örnek 2: $(-7)^{23}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $(-7)^{23} = (-)^{23}.7^{23} = - 7^{23}$

Örnek 3: $(-2)^4$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $(-2)^4 = (-)^4.2^4 = 2^4 = 16$

Örnek 4:

$$\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{8}{14}\right)^{-1} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{8}{14}\right)^{-1} = \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{14}{8}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Örnek 5: $(-4)^2 + (-4)^2 : 8 = ?$

Çözüm: $(-4)^2 + (-4)^2 : 8 = 16 +16 : 8 = 16 + 2 = 18$

Örnek 6: $(-3)^{15} + 2.(-3)^{15} = ?$

Çözüm: $(-3)^{15} + 2.(-3)^{15} = (1+2).(-3)^{15} = 3.(-3)^{15} = 3.(-)^{15}.3^{15} = - 3.3^{15} = 3^{16}$

Örnek 7: $5^3 - 2^5 + 3^4 = ?$

Çözüm: $5^3 - 2^5 + 3^4 = 125 - 32 + 81 = 206 - 32 = 174$

Örnek 8: $(-3)^3.3^2.3^{-1} = ?$

Çözüm: $(-3)^3.3^2.3^{-1} = -3^3.3^2.3^{-1} = - 3^{3+2-1} = - 3^4 = - 81$

Örnek 9: $(16)^{1/2} = ?$

Çözüm: $(16)^{1/2} = (42)^{1/2} = 4^1 = 4$

Örnek 10: $(32)^{-1/5} = ?$

Çözüm: $(32)^{-1/5} = (2^5)^{-1/5} = 2^{-1} = 1/2$

Örnek 11: $2^{3x-7} = 32$ ise, $x = ?$

Çözüm: $2^{3x-7} = 32$ Þ $2^{3x-7} = 2^5$ Þ $3x-7 = 5 \Rightarrow 3x = 5+7$ Þ $3x=12$ Þ $x=4$

Örnek 12: $3^{2x}.3^4 = 27$ ise, $x = ?$

Çözüm: $3^{2x}.3^4 = 27 \Rightarrow 3^{2x+4}=3^3$ Þ $2x+4=3$ Þ $2x=3-4$ Þ $2x= -1$ Þ $x= -1/2$

Örnek 13: $2^x.2^6 = 8$ ise, x kaçtır?

Çözüm: $2^x.2^6 = 8 \Rightarrow 2^{x+6}=2^3 \Rightarrow x+6=3 \Rightarrow x=3-6 \Rightarrow x= -3$

Örnek 14:

$$\frac{\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}}{(27)^{\frac{2}{3}}} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{(81)^{\frac{1}{2}} - (27)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(9^2)^{\frac{1}{2}} - (3^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{9-3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Örnek 15:

$$\frac{2^{2x} + 2^x + 2^{3x}}{2^{5x} + 2^{4x} + 2^{3x}} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{2^x2^x+2^x+2^x2^x2^x}{2^{3x}2^{2x}+2^{3x}2^x+2^{3x}}=\frac{2^x(2^x+1+2^{2x})}{2^{3x}(2^{2x}+2^x+1)}=\frac{2^x}{2^{3x}}=2^{x-3x}=2^{-2x}=\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{4^x}$$

Örnek 16:

$$\frac{a^{n+3}+a^{n+2}+a^{n+1}}{a^3+a^2+a}=a^3$$

ise, n kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a^n(a^3+a^2+a)}{(a^3+a^2+a)}=a^3$$

dır. Buradan, $a^n = a^3$ tür ve böylece n=3 bulunur.

Örnek 17:

$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 13.3^{2n}$ ise, n kaçtır?

Çözüm:

$3^n(1+3+3^2) = 13.3^{2n}$
$3^n .13 = 13.3^{2n}$

Buradan, $3^n = 3^{2n}$ bulunur. Her iki taraf 3^n ile bölünürse,

$3^{2n}/3^n = 1$ olur ve $3^{2n-n} = 1$ $3^n = 1$ n=0

olur.

Örnek 18:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=2^{3k} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2m-3}=5$$

ise, (k+m) toplamı kaçtır?

Çözüm:

$2^{-(k+1)} = 2^{3k}$	$5^{-2m+3} = 5^1$
-k-1 = 3k	-2m+3 = 1
-1 = 4k	2m = 2
k = -1/4	m = 1

Buradan, k+m = -1/4+1 = 3/4 bulunur.

Örnek 19:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{6m} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{-4m-8}$$ ise, m kaçtır?

Çözüm:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{6m} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{4m+8}$$

6m = 4m+8
2m=8
m=4

Örnek 20:

$$3^{20} - 6.3^{18} = \ ?$$

Çözüm:

$$3^{18}.3^{2} - 6.3^{18} = 3^{18}.(3^{2}-6) = 3^{18}.3 = 3^{19}$$

Örnek 21:

$3^x = 2a$ ve $2^{x+3} = b$ ise, 6^x in a ve b cinsinden değeri kaçtır?

Çözüm:

$$2^{x+3} = b \Rightarrow 2^x.2^3 = b \text{ Þ } 2^x = b/8 \text{ dir.}$$

$$6^x = (2.3)^x = 2^x.3^x = (b/8).2a = (a.b)/4$$

bulunur.

Örnek 22:

m, n, p birer tamsayı olmak üzere, $2^m + 2^n + 2^p = 28$ ve m > n > p ise,

m + 2n -3p = ?

Çözüm:

$2^m + 2^n + 2^p = 28$ ve m > n > p koşulunu sağlayan değerler şunlardır:

$$m = 4,\ n = 3,\ p = 2.$$

Böylece,

$$m + 2n - 3p = 4 + 2.3 - 3.2 = 4 + 6 - 6 = 4 \text{ olur.}$$

Örnek 23:

$16^m = 5$ ise, 2^{2m} kaç olur?

Çözüm:

$16^m = 5$ Þ $(2^4)^m = 5$ Þ $2^{4m} = 5$ Þ $(2^{4m})^{1/2} = (5)^{1/2}$ Þ $2^{2m} = 5^{1/2}$ bulunur.

Örnek 24:

$$\frac{0,0009}{(0,01)^2} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{0,0009}{(0,01)^2} = \frac{\frac{9}{10000}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10000}}{\frac{1}{10000}} = 9$$

Örnek 25:

$$(2,5)^{2x} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = 1$$

ise, x kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

Örnek 26:

$$8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,5} + 16^{0,75} = ?$$

Çözüm:

$$\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(9^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^2 - 9^1 + 2^3$$

$$= 4 - 9 + 8 = 12 - 9 = 3$$

Örnek 27:

$2^x = 15$, $3^y = 90$, $7^z = 30$ ise, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

a) x < y < z b) z < x < y c) y < x < z d) x < z < y e) z < y < x

Çözüm:

$2^x = 15$ olduğundan, x değeri 3 ile 4 arasındadır. Yani, 3 < x < 4 dür.

$3^y = 90$ olduğundan, y değeri 4 ile 5 arasındadır. Yani, 4 < y < 5 dir.

$7^z = 30$ olduğundan, z değeri 1 ile 2 arasındadır. Yani, 1 < z < 2 dir.

Dolayısıyla,

$$z < x < y$$

olmalıdır. Doğru seçenek, b dir.

Etkinlik:

- $\left.\begin{array}{l} 3^{-x} = a \\ 2^x = b \end{array}\right\}$ ise 144^{2x} in a ve b türünden değeri buldurulur.

- $\dfrac{-a^2(-a)^2(-a)^3 a^{10}}{-a^3(-a^2)^3(-a)^4}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $7.5^x + 4.5^{x+1} - 5^{x+2} = 50$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

- $n \in N$ olmak üzere, $x^{2n+4} = 6^{2n+4}$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

- $(\frac{7}{6})^{5-4x} \le (\frac{6}{7})^{3x+2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi buldurulur.

- $(3x+5)^{6x-8} = 1$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

- $\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x^2 - 9x + 20} = 1$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

- $2^x - 3.2^{x-1} + 5.2^{x+1} = 76$ denklemini çözünüz.

- $\left.\begin{array}{l} 9^x = 32 \\ 8^y = 81 \end{array}\right\}$ ise $x.y$ kaçtır?

- $(0.125)^{1-x} = 16^{2x+3}$ denklemini çözünüz.