1.ÜNİTE SAYMA VE OLASILIK

Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma

Toplama Yoluyla Sayma

A ve B ayrık *($A \cap B = \emptyset$)* iki küme olmak üzere, A ve B kümelerinin toplam kaç elemanı olduğunu,
$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$, şeklinde toplama işlemi yaparak buluruz.
İki kümenin birleşimini bu yolla bulmaya toplama yoluyla sayma denir.
Ayrık iki işlemden biri m yolla, diğeri n yolla yapılabiliyorsa; bu işlemlerden biri veya diğeri
$m + n$ yolla yapılabilir.

Örnek:

3 ceket ve 5 gömlek arasından 1 ceket veya 1 gömlek kaç farklı yolla giyilebilir.

Çözüm:

3 ceket ve 5 gömlek arasından 1 ceket *veya* 1 gömlek: $3 + 5 = 8$ farklı yolla seçilebilir.

Çarpma Yoluyla Sayma

İlk işlem m yolla yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu m yoldan birisiyle yapıldıktan sonra
ikinci işlem n yoldan yapılabiliyorsa bu iki işlem birlikte *(art arda)* $m \cdot n$ yolla yapılabilir.

Örnek:

Farklı özellikte 5 Matematik ve 2 Kimya kitabı arasından 1 matematik ve 1 kimya kitabı
seçimi kaç yolla yapılabilir?

Çözüm:

Çarpma kuralı gereği 5 Matematik ve 2 Kimya kitabı arasından 1 matematik ve
1 kimya kitabı $5 \cdot 2 = 10$ yolla seçilebilir.

Örnek:

1, 2, 3, 4, 5 rakamlarını kullanarak üç basamaklı rakamları farklı yazabileceğimiz
kaç farklı sayı olduğunu bulalım.

Çözüm:

Üç basamaklı sayı için üç kutucuk oluşturalım.

Yüzler bas.	Onlar bas.	Birler bas.

Yüzler basamağından başlayarak kutu içlerine kaç farklı rakam gelebileceğini yazalım.

5	4	3

Yüzler basamağı için 5 seçenek vardır. Kullanılan bir rakam bir kez daha kullanılamayacağından
onlar basamağına 4, birler basamağına 3 seçenek kalmıştır.
Buna göre kutularda bulunan sayıları çarparsak, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı sayı yazılabilir.

Faktöriyel Kavramı

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve n! biçiminde gösterilir.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Aklınızda Bulunsun!

$n! = n \cdot (n - 1)!$

Örnek:

8! sayısı 6! sayısının kaç katıdır?

8! = 8.7.6! olarak açalım.

$8! = 6!.k \Rightarrow 8.7.\cancel{6!} = \cancel{6!}.k$

$\Rightarrow k = 56$

Örnek:

$\dfrac{12! - 11!}{10! + 9!}$ işleminin sonucu kaçtır?

$12! = 12.11!$

$10! = 10.9!$

$\dfrac{12! - 11!}{10! + 9!} = \dfrac{11!(12-1)}{9!(10+1)} = \dfrac{11.10.\cancel{9!}.\cancel{11}}{\cancel{9!}.\cancel{11}}$

$= 110$

Örnek:

$a = 7.3! + 3.3!$

$b = 6! - 5!$

olduğuna göre, $\dfrac{b}{a}$ ifadesinin değeri kaçtır?

$b = 5!(6-1)$

$a = 3!(7+3)$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{5!.5}{3!.10} = \dfrac{5.4.3!}{3!.2}$

$= 10$

Örnek:

$\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!} = 10$ olduğuna göre, n kaçtır?

$\dfrac{(n+3)\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}} = 10 \Rightarrow n+3 = 10$

$\Rightarrow n = 7$

Örnek:

$(n + 3)! = 1$

olduğuna göre, n nin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

$0! = 1$ ya da $1! = 1$ dir.

$n + 3 = 0$, $n + 3 = 1$

$\Rightarrow n = -3$ $\Rightarrow n = -2$

$(-3) + (-2) = -5$

Örnek:

$\dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$

ifadesinin eşitini bulunuz.

$\dfrac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} + \dfrac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = n + n + 2$

$= 2n + 2$

PERMÜTASYON *(SIRALAMA)*

Sonlu bir kümenin elemanlarının tamamının veya bir kısmının, belirli bir sıra ile dizilişlerinden her birine o kümenin bir permütasyonu denir.

3 kişinin yan yana dizilişi,

5 kişinin 5 farklı sandalyeye oturmaları,

7 kişinin yan yana durup fotoğraf çektirmeleri, harflerin veya rakamların yan yana dizilerek kelime veya sayı oluşturulması permütasyona örnek olarak verilebilir.

Buna göre, permütasyon nesnelerin sıralanmasıdır.

Örnek:

A = {1, 2, 3} kümesinin bütün permütasyonlarını bulalım.

Çözüm:

1, 2 ve 3 rakamlarının yan yana oluşturduğu altı farklı sıralama (dizilişi) yani permütasyonu;

123, 132, 213, 231, 312 ve 321 dir.

Not: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin tüm permütasyonlarının sayısı, $P(n, n) = n!$ dir.

Bir elemanlı permütasyonlarının yani dizilişlerinin sayısı $P(n, 1) = n$ dir.

n ve r doğal sayılar ($n \geq r$) olmak üzere, n tane elemandan r tanesinin farklı dizilişlerinin sayısı $P(n, r)$ ile gösterilir ve n elemanlı bir kümenin r li permütasyonu diye okunur.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Pratik yol :

$$P(6, 3) = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{3\text{ tane}}$$

$$P(5, 2) = \underbrace{5 \cdot 4}_{2\text{ tane}}$$

Örnek:

$$P(3, 2) + P(5, 2)$$

toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$P(3, 2) + P(5, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} + \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$= \frac{3!}{1!} + \frac{5!}{3!}$$

$$= 6 + 5 . 4$$

$$= 26 \text{ olur.}$$

Örnek:

7 değişik kitap bir rafa, sıralı olarak kaç değişik biçimde yerleştirilebilir?

A) 120 B) 720 C) 1440
D) 4040 E) 5040

Çözüm :

Yedi kitap bir rafa sıralı olarak $P(7, 7) = 7!$ kadar yerleştirilebilir. $7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

Yanıt : E

Örnek:

5 kişilik bir grupta 2 arkadaş daima yan yana gelmek koşulu ile 5 kişilik bir koltuğa kaç değişik biçimde oturabilirler?

A) 36 B) 48 C) 60 D) 72 E) 120

Çözüm :

2 arkadaş 1 kişi olarak düşünürsek 4! bulunur. Ancak 2 arkadaş kendi arasında 2! kadar değişik otururlar.

O halde $4!\,2! = 24.2 = 48$

Yanıt : B

Örnek:

A, B, C, D, E isimli kişiler E başta olmak üzere, bir banka yan yana kaç farklı biçimde oturabilir?

A) 4 B) 6 C) 24 D) 48 E) 120

ÇÖZÜM

$\boxed{A}\ \underbrace{BCDE}$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

CEVAP C

Tekrarlı Permütasyon

n tane nesnenin n_1 tanesi birinci cinsten, n_2 tanesi ikinci cinsten, n_3 tanesi üçüncü cinsten, ..., n_r tanesi r. cinsten ve $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$ olmak üzere n tane elemanın birbirinden farklı sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots n_r!}$$ ile bulunur.

Örnek:

2123 sayısının rakamlarıyla 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm:

$2 \rightarrow 2$ tane
$1 \rightarrow 1$ tane
$3 \rightarrow 1$ tane

O halde $\frac{4!}{2!\,.\,1!\,.\,1!} = 12$ farklı sayı yazılabilir.

Örnek:

ADNAN kelimesinin harfleriyle beş harfli anlamlı veya anlamsız kaç değişik kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

ADNAN kelimesi 5 harflidir.
A dan 2 tane, D den 1 tane, N den 2 tane harf olduğuna göre,

$$\frac{5!}{2!\,.\,1!\,.\,2!} = \frac{5\,.\,\cancel{4}^{1}\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{\cancel{2}_{1}\,.\,1\,.\,\cancel{2}_{1}} = 30$$ değişik kelime yazılabilir.

Örnek:

2 siyah, 3 beyaz, 4 kırmızı özdeş bilye yanyana dizilecektir.

a) Kaç değişik şekilde dizilebilir?

b) Kırmızı bilyeler bir arada olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm:

a) 2 siyah + 3 beyaz + 4 kırmızı = 9 bilye vardır.

$$\frac{9!}{2!\,.\,3!\,.\,4!} = \frac{9\,.\,\cancel{8}^{4}\,.\,7\,.\,\cancel{6}\,.\,5\,.\,\cancel{4!}^{1}}{\cancel{2}_{1}\,.\,\cancel{3}_{1}\,.\,\cancel{2}_{1}\,.\,1\,.\,\cancel{4!}_{1}} = 1260$$ değişik şekilde dizilebilir.

b) Kırmızı bilyeler bir arada olacağına göre 4 ünü 1 eleman gibi düşünelim, ayrıca 2 siyah ve 3 beyaz bilye olduğundan toplam 6 eleman olur.

O halde $\frac{6!}{2!\,.\,3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{2\,.\,\cancel{3!}} = 60$ farklı şekilde dizilebilir.

Kombinasyon(Seçme)

$n, r \in N$ ve $r \leq n$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine A kümesinin r li kombinasyonu denir.

n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı aşağıdaki formülle bulunur.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Kombinasyon Özellikleri

1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Örneğin; $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ olur.

2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

4) $\binom{n}{r} = \binom{n}{k}$ ise $r = k$ veya $n = r + k$ olur.

5) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ dir.

6) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Örnek:

6 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyonlarının sayısını bulalım.

Çözüm

$$C(6,3)=\frac{P(6,3)}{3!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=20$$

Örnek:

7 kişilik bir gruptan 3 kişilik kaç değişik takım kurulabilir?

Çözüm

7 kişiden 3 kişilik bir takımı $\binom{7}{3}$ farklı şekilde seçebiliriz.

Buna göre, $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{6}}=35$ olur.

Örnek:

Yunus 2 farklı matematik ve 4 farklı kimya kitabı arasından 3 kitabı kaç farklı şekilde seçebilir?

Çözüm

Yunus $2+4=6$ kitap arasından 3 kitabı

$\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=20$ farklı şekilde seçebilir.

Örnek:

5 elemanlı alt küme sayısı, 4 elemanlı alt küme sayısına eşit olan bir kümenin 7 elemanlı alt küme sayısını bulalım.

Çözüm

Kümenin eleman sayısı n olsun.

$\binom{n}{5}=\binom{n}{4}$ ise $n=5+4=9$ dur.

$\binom{9}{7}=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot8}{2!}=36$ dır.

Binom Teoremi - Pascal Üçgeni ilişkisi

İki terimli bir ifadenin tam kuvvetlerinin açılımına **binom açılımı** denir.

$$(x + y)^n$$

ifadesinin terimleri tek tek yazıldığında karşımıza binom açılımı çıkmış olur. Bu açılımda katsayılar Pascal üçgenindeki satır elemanlarıdır.

Örneğin,

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1.x + 1.y$

$(x + y)^2 = 1.x^2 + 2.xy + 1.y^2$

$(x + y)^3 = 1.x^3 + 3.x^2y + 3.x.y^2 + 1.y^3$

$(x + y)^4 = 1.x^4 + 4.x^3y + 6.x^2.y^2 + 4.xy^3 + 1.y^4$

$(x + y)^5 = 1.x^5 + 5.x^4y + 10.x^3.y^2 + 10x^2y^3 + 5.xy^4 + 1.y^5$

Pascal Üçgeni

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
.
.
.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. Şekilde Pascal üçgeninin bir bölümü verilmiştir.

1
1 1
1 2 1

Buna göre,

$$(x + y)^2$$

açılımını pascal üçgeninden yararlanarak yapınız.

Çözüm:

$x^2.y^0 + x^1.y^1 + x^0.y^2$ ifadesinde pascal üçgenindeki ilgili satır elemanlarını katsayı olarak yerleştirildiğinde, $x^2 + 2xy + y^2$ olur.

2. Şekilde Pascal üçgeninin bir bölümü verilmiştir.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Buna göre,

$$(a + 2)^3$$

açılımını pascal üçgeninden yararlanarak yapınız.

Çözüm:

$a^3.2^0 + a^2.2^1 + a^1.2^2 + a^0.2^3$ ifadesinde pascal üçgenindeki ilgili satır elemanları katsayı olarak yerleştirildiğinde,
$a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ olur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Şekilde Pascal üçgeninin bir bölümü verilmiştir.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Buna göre,

$$(m + n)^4$$

açılımında $m^2.n^2$ nin katsayısını pascal üçgeni yardımıyla bulunuz.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

2. Şekilde Pascal üçgeninin bir bölümü verilmiştir.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Buna göre,

$$(2x + 1)^3$$

açılımında x^2 nin katsayısını pascal üçgeni yardımıyla bulunuz.

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

1-E **2-D**

Binom Açılımı

$(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + ... + \binom{n}{n}.a^0.$

açılımına **binom açılımı** denir.

Bu açılımda,

→ $n+1$ terim vardır.

→ a nın azalan kuvvetlerine göre açılmıştır.

→ a nın kuvveti ile b nin kuvvetinin toplamı her zaman n dir.

→ $a^p.b^q$ nın katsayısı $\binom{n}{q}.a^p.b^q$ dur. $(p+q=n)$

→ Baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r}\ a^{n-r}.b^r$ dir.

→ n çift olmak üzere, ortanca terim $\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}}$ dir.

→ Tanımlı olması şartıyla sabit terimi bulabilmek için bilinmeyenler yerine 0 yazılır.

→ Katsayılar toplamını bulabilmek için bilinmeyenler yerine 1 yazılır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $(a+b)^6$

açılımında kaç terim vardır?

Çözüm:

Terim sayısı $6+1=7$ biçiminde bulunur.

2. $(3x-2)^6$

açılımında sabit terim kaçtır?

Çözüm:

Sabit terimi bulabilmek için x yerine sıfır (0) yazılır.

$(3.0-2)^6 = (-2)^6 = 64$

3. $(2x+1)^4$

açılımında katsayılar toplamı kaçtır?

Çözüm:

Katsayılar toplamını bulabilmek için x yerine 1 yazılır.

$(2.1+1)^4 = 3^4 = 81$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $(x+2)^4 = \binom{4}{0}.x^4.2^0 + \binom{4}{1}.x^3.2^1 + \binom{4}{2}.x^2.2^2 + \binom{4}{3}.x^1.2^3 + \binom{4}{4}.x^0.2^4$

ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açılmıştır.

Buna göre, baştan 2. terim nedir?

A) x^3 B) $3x^3$ C) $4x^3$ D) $8x^3$ E) $12x^3$

2. $(x+y)^3 = \binom{3}{0}.x^3.y^0 + \binom{3}{1}.x^2.y^1 + \binom{3}{2}.x^1.y^2 + \binom{3}{3}.x^0.y^3$

ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açılmıştır.

Buna göre, $x^2.y$ nin katsayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $(3x+1)^4$

ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 3. terim

$\binom{4}{2}.(3x)^2.1^2$

biçimindedir.

Buna göre, x^2 nin katsayısı kaç olur?

A) 54 B) 48 C) 42 D) 36 E) 30

1-D	2-C	3-A

Olasılık İle İlgili Kavramlar

Deney: Sonuçları gözlemlenebilen ya da kavranabilen olaylara deney denir.

Örneğin, Bir madeni para atılması, bir zarın atılması, bir torbadan bilye çekilmesi birer deneydir.

Çıktı: Deneyin sonuçlarına çıktı denir.

Örneğin, Bir madeni para atılması deneyinde çıktılar yazı ve tura olmak üzere, iki tanedir.

Örnek Uzay: Çıktıların oluşturduğu kümeye örnek uzay denir.

Örneğin, Bir madeni para atılması deneyinde örnek uzay, {Y,T} ve s(E) = 2 dir.

Olay: Örnek uzayın her alt kümesine olay denir.

Örneğin, Bir zar atılması deneyinde zarın 4 ten büyük gelmesi bir olaydır.

Bir Olayın Tümleyeni

Bir olayın çıktıları dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya o olayın tümleyeni denir.

A olayı herhangi bir örnek uzaya ait olmak üzere, A olayının tümleyeni A' ile gösterilir.

Kesin Olay, İmkansız Olay

Olasılık değeri 1 olan olaylara kesin olay, olasılık değeri 0 olan olaylara imkansız olay denir.

Ayrık Olay

Aynı örnek uzaya ait olmak üzere, aynı anda gerçekleşemeyen olaylara ayrık olay denir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **Bir zar atma deneyindeki çıktılar nelerdir?**

Çözüm:
Bir zar atma deneyinde oluşabilecek tüm durumlar deneyin çıktılarıdır. Buna göre, istenilen durum,
{1, 2, 3, 4, 5, 6} olur.

2. **Bir madeni paranın art arda iki kez atılması deneyinde oluşan örnek uzay nedir?**

Çözüm:
Bir madeni para iki kez atıldığında oluşan tüm çıktıları küme ile belirtelim.
{YY, YT, TY, TT}

3. **Bir çift zar atılması deneyinde zarların üst yüzeylerine gelen sayıların toplamının 5 olması olayının çıktılarını yazınız.**

Çözüm:
(1, 4) ten başlayarak toplamlarının 5 gelmesi durumlarını yazalım.
{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Bir zar atma deneyinde A olayı zarın çift sayı gelmesidir.
Buna göre, A olayının tümleyeni nedir?

A) {2, 4, 6} B) {1, 3, 5} C) {1, 4, 5} D) {3} E) {5}

2. **Ayla, Betül, Canan, Deniz isimli arkadaşların kendi içlerinde sıralanması olayında oluşan örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.**

A) 12 B) 18 C) 20 D) 24 E) 32

3. **İçinde farklı 3 beyaz, 4 farklı siyah top bulunan torbadan rastgele iki top çekildiğinde oluşan örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.**

A) 21 B) 20 C) 18 D) 16 E) 12

1-B	2-D	3-A

Basit Olayların Olasılığı

Basit Olay

Örnek uzayın bir elemanlı alt kümelerine **basit olay** denir.

Örneğin, Bir zar atma deneyinde zarın 2 gelmesi basit olaydır.

Bir madeni para art arda iki kez atıldığında birincinin yazı, ikincinin tura gelmesi basit olaydır.

Olasılık Hesabı

Bir A olayının gerçekleşme olasılığı P(A) ile gösterilir ve

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

biçiminde hesaplanır.

Örneğin, bir zar atma deneyinde zarın 2 gelmesi olayı A olsun.

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ve A = {2} olmak üzere,

A olayının gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

- Bir olayın gerçekleşmesi olasılığı ile gerçekleşmemesi olasılığının toplamı 1 dir.

$$P(A) + P(A') = 1$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **Bir madeni para art arda iki kez atıldığında birincinin yazı ikincinin tura gelmesi olasılığı kaçtır?**

Çözüm:

Örnek uzayın eleman sayısı {YY, YT, TY, TT} olmak üzere 4 tür.

İstenilen duruma ise {YT} olmak üzere, istenilen olasılık $\frac{1}{4}$ dür.

2. **Bir zar atıldığında üst yüze gelen sayının 5 gelmesi olasılığı kaçtır?**

Çözüm:

Örnek uzayın eleman sayısı {1, 2, 3, 4, 5, 6} olmak üzere, 6 dır.

İstenilen durum {5} olduğundan istenilen olasılık $\frac{1}{6}$ dır.

3. **İçinde 2 mavi, 3 sarı, 4 siyah top bulunan bir torbadan çekilen topun siyah gelmemesi olasılığı kaçtır?**

Çözüm:

Siyah gelmesi olasılığı $\frac{4}{9}$ dur.

Bu durumda siyah gelmemesi olasılığı $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ dur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Bir makinede üretilen ürünler %30 oranında hatalı üretilmektedir. **Buna göre, üretilen ürünün hatasız olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{4}{10}$ C) $\frac{5}{10}$ D) $\frac{6}{10}$ E) $\frac{7}{10}$

2. **Bir zar art arda iki kez atıldığında birincinin 3, ikincinin 4 gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{36}$

3. **Bir madeni para art arda üç kez atıldığında üçünün de yazı gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{12}$

1-E	2-E	2-B

Ayrık Olayların İle Ayrık Olmayan Olayların Olasılıkları

A ile B ayrık olaylar olsun.
A veya B olayının gerçekleşme olasılığı,

P(A veya B) = P(A) + P(B)

biçiminde hesaplanır.

Not: P(A veya B) = $P(A \cup B)$

Örneğin, A ile B ayrık olaylar olsun.

$P(A) = \frac{1}{3}$ ve $P(B) = \frac{1}{4}$ ise

$P(A \text{ veya } B) = \underset{(4)}{\frac{1}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ dır.

A ile B ayrık olmayan olaylar olsun.
A veya B olayının gerçekleşme olasılığı,

P(A veya B) = P(A) + P(B) – P(A ve B)

biçiminde hesaplanır.

Not: P(A ve B) = $P(A \cap B)$

Örneğin,
A ile B ayrık olmayan olaylar olsun.

$P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ ve $P(A \text{ ve } B) = \frac{1}{10}$

ise $P(A \text{ veya } B) = \underset{(8)}{\frac{2}{5}} + \underset{(5)}{\frac{3}{8}} - \frac{1}{10} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40} - \frac{4}{40} = \frac{27}{40}$ dır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **M ile N ayrık olaylar olsun.**

$P(M) = \frac{1}{6}$ ve $P(N) = \frac{2}{3}$

ise $P(M \cup N)$ değeri kaçtır?

Çözüm:
M ile N ayrık olaylar olduğundan,
P(M veya N) = P(M) + P(N) eşitliğini kullanalım.

$P(M \cup N) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ dır.

2. A ile B ayrık olaylar olsun.

$P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A \text{ veya } B) = \frac{1}{2}$

ise P(B) değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + P(B)$

$P(B) = \frac{1}{10}$

3. **Bir zar atıldığında zarın üst yüzüne gelen sayının 3 veya 4 gelmesi olasılığı kaçtır?**

Çözüm:
3 gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$, 4 gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$ dır.

Buna göre, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Bir sınıftaki 14 öğrencinin 6 tanesi yeşil gözlü, 3 tanesi mavi gözlü 5 tanesi de siyah gözlüdür.
Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin yeşil gözlü veya siyah gözlü olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{11}{14}$ D) $\frac{13}{14}$ E) 1

2. A ile B ayrık olmayan olaylardır.

$P(A \text{ veya } B) = \frac{4}{5}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$

ise P(A ve B) kaçtır?

A) $\frac{13}{60}$ B) $\frac{14}{60}$ C) $\frac{15}{60}$ D) $\frac{16}{60}$ E) $\frac{17}{60}$

3. A = {1, 3, 5, 7}
B = {2, 4, 6} kümeleri veriliyor.
Buna göre $A \cup B$ kümesinden rastgele seçilen bir elemanın 1 veya 2 olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

1-C	2-E	3-B

2.ÜNİTE FONKSİYONLAR

Fonksiyon Kavramı

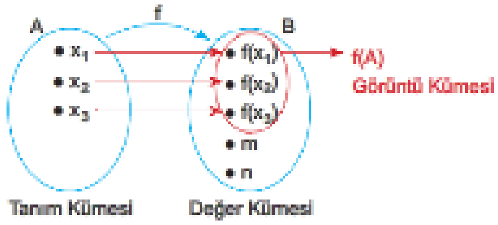
A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere,
A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye A dan B ye tanımlı fonksiyon denir ve $f: A \to B$ biçiminde gösterilir.

- Fonksiyondaki A kümesine fonksiyonun tanım kümesi, B kümesine fonksiyonun değer kümesi denir.
- $f: A \to B$ fonksiyonunda $x \in A$, $y \in B$ ile ilişkilendiriliyor ise bu ifade $y = f(x)$ biçiminde gösterilir.
  y, x in f altındaki görüntüsü veya f nin x deki değeri y dir denir.
- Tanım kümesindeki tüm elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir.
  f(A) ile gösterilir.

Görüntü kümesi ortak özellik yöntemiyle

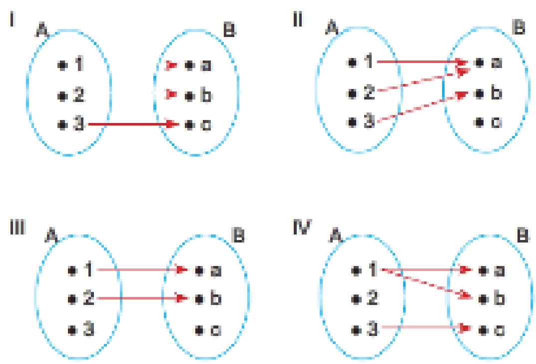
$f(A) = \{f(x): x \in A\}$

biçiminde gösterilir.
Görüntü kümesi değer kümesinin bir alt kümesidir ve $f(A) \subset B$ biçiminde gösterilir.



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEK

1. A = {1, 2, 3} ve B = {a, b, c} kümeleri veriliyor.
Buna göre,

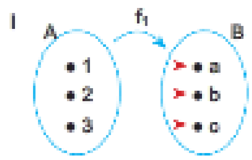


yukarıdaki ilişkilendirmelerden hangileri $f: A \to B$ fonksiyon belirtir?

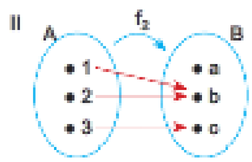
Çözüm:
A kümesindeki her bir elemanın B kümesindeki yalnız bir elemanla eşleşmesi ilişkilendirmenin fonksiyon olduğunu gösterir. Buna göre, I ve II birer fonksiyondur.

ÖĞRENCİ SORUSU

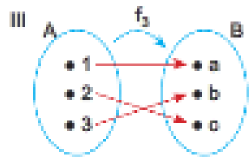
1. A = {1, 2, 3} ve B = {a, b, c} kümeleri veriliyor.
Buna göre,



$f_1 = \{(1,a), (2,b), (3, c)\}$



$f_2 = \{(1,b), (2,b), (3, c)\}$



$f_3 = \{(1,a), (2,b), (3, c)\}$

verilen fonksiyon gösterimlerinden hangisinin yanlış olduğunu bulunuz.

A) Yalnız I
B) Yalnız II
C) Yalnız III
D) I ve II
E) I ve III

1-C

Fonksiyon Çeşitleri

Bire bir (1 - 1) Fonksiyon

f fonksiyonu için, tanım kümesinden alınan her x_1 ve x_2 için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonu bire bir (1 - 1) fonksiyondur.

Örten Fonksiyon

Fonksiyonun değer kümesindeki her eleman tanım kümesinden en az bir elemanla eşleşmiş ise fonksiyona örten fonksiyon denir.

İçine Fonksiyon

Fonksiyonun değer kümesinde boşta eleman kalıyorsa fonksiyona içine fonksiyon denir.

Sabit Fonksiyon

$f : A \to B$ ve $c \in B$ olmak üzere, her $x \in A$ için $f(x) = c$ oluyorsa f ye sabit fonksiyon denir.

Birim Fonksiyon

$f : A \to B$ olmak üzere,

$f(x) = x$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara birim fonksiyon denir.

Doğrusal Fonksiyon

m ile n gerçek sayı olmak üzere,

$f : R \to R$ tanımlı

$f(x) = mx + n$

biçimindeki fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir.

Tek - Çift Fonksiyon

Uygun tanım kümesinde

$f(x) = f(-x)$ ise f ye çift fonksiyon

$-f(x) = f(-x)$ ise f ye tek fonksiyon denir.

İki Fonksiyonun Eşitliği

Tanım ve görüntü kümeleri eşit olan f ve g fonksiyonları için, tanım kümesindeki her bir x elemanı için

$f(x) = g(x)$

şartı sağlanıyorsa f ile g ye eşit fonksiyonlar denir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere,

$f : A \to B$, $f(x) = x + 2$

fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$f(1) = 3$

$f(2) = 4$

$f(3) = 5$

olduğundan f fonksiyonu birebirdir.

2. $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2$

fonksiyonu için,

I. Bire bir fonksiyondur.

II. İçine fonksiyondur.

III. Örten fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

Çözüm:

$f(-1) = 1$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

olduğundan fonksiyon örtendir.

Fonksiyon bire bir değildir.

Fonksiyon içine değildir.

cevap yalnız III

ÖĞRENCİ SORULARI

1. f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 1 - f(-x)$

ise f(1) değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

2. f tek fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (m - 2)x^2 + mx$

ise f(2) değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1-D	2-D

Fonksiyonlarda Dört İşlem

Tanım kümeleri aynı olan f ve g fonksiyonlarıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıdaki gibi uygulanabilir.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$

Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

Tanım kümesinin ayrık alt kümeleri için farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyonlar ya da kısaca parçalı fonksiyonlar denir.

x = a noktası ile sayı doğrusunu iki parçaya ayıralım. a'dan büyük x değerleri için fonksiyon $\vartheta(x)$, a dan küçük x değerleri için fonksiyon u(x) olsun.

Bu durumda parçalı fonksiyon,

$$f(x) = \begin{cases} \vartheta(x), & x > a \text{ ise} \\ u(x), & x < a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde gösterilir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **f(2) = 3 ve g(2) = 7 olmak üzere,**

$$(f+g)(2)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$(f+g)(2) = f(2) + g(2)$

eşitliğinde f(2) ve g(2) değerlerini yerine yazarak cevabı bulalım.

$f(2) + g(2) = 3 + 7 = 10$

2. **f(1) = 5 ve g(1) = 2 olmak üzere,**

$$(f-g)(1)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$(f-g)(1) = f(1) - g(1)$

olmak üzere, f(1) ve g(1) değerlerini yerine yazarak cevabı bulalım.

$f(1) - g(1) = 5 - 2 = 3$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **Gerçel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları**

$f(x) = x^3$

$g(x) = x^2 + 1$

ise (f.g)(2) çarpımının sonucu kaçtır?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

2. Gerçel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2 + 1$

ise (3f – 2g)(1) işleminin sonucu kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1-C 2-B

Fonksiyon Grafiklerinin Çizimi

Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri

$f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun grafiği çizilirken eksenleri kesen noktalar bulunarak bu noktalardan geçen doğrunun çizimi yapılır.

a ve b sıfırdan farklı olmak üzere,

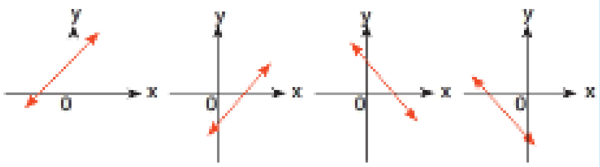
$y = ax + b$ fonksiyonunda

$x = 0$ için $y = b$ (y eksenini kesen nokta)

$y = 0$ için $ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ (x eksenini kesen nokta)}$$

olmak üzere, doğrusal fonksiyon grafiği,



Şekillerinden herhangi biri gibi olacaktır.

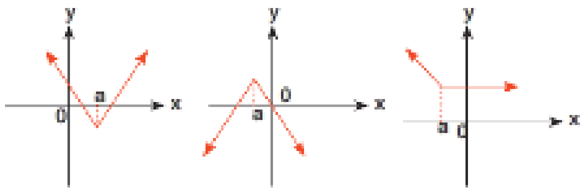
Parçalı Tanımlı Fonksiyonların Grafikleri

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq a \\ v(x), & x < a \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği çizilirken

1. Adım: $y = u(x)$ fonksiyon grafiği çizilir ve $x \geq a$ için belirtilir.
2. Adım: $y = v(x)$ fonksiyon grafiği çizilir ve $x < a$ için belirtilir.
3. Adım: İlk iki adımda belirtilen grafikler aynı analitik düzlemde gösterilir.

Buna göre,



gibi grafikler elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

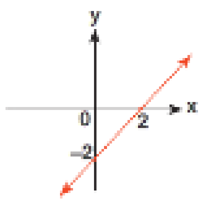
1. $f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x) = x - 2$

doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$y = f(x)$ olmak üzere, $y = x - 2$ fonksiyonunda $x = 0$ için y değerini, sonrasında $y = 0$ için x değerini bularak bu noktalardan geçen doğruyu çizelim.



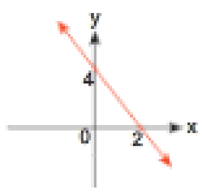
2. $f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x) = -2x + 4$

doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$y = -2x + 4$ fonksiyonunda eksenleri kesen noktaları bularak grafiği çizelim.



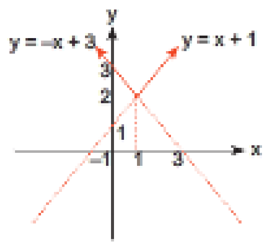
3.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \text{ ise} \\ -x + 3, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı tanımlı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1. Adım: $y = x + 1$ doğrusunu çizerek $x \geq 1$ için doğruyu belirtiyoruz.
2. Adım: $y = -x + 3$ doğrusunu çizerek $x < 1$ için doğruyu belirtiyoruz.
3. Adım: İlk iki adımı aynı analitik düzlemde gösteriyoruz.



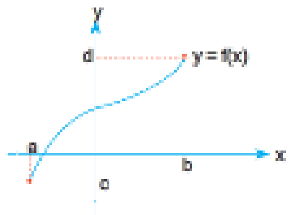
Fonksiyon Grafiklerinin Yorumlanması

f: [a, b) ⟶ [c, d) tanımlı olmak üzere,

Tanım kümesinden alınan her bir x ile x'in görüntüsü olan f(x) elemanları için (x, f(x)) biçimindeki sıralı ikililerden oluşturulan kümeye f'nin grafik noktaları kümesi denir ve Grafik(f) ile gösterilir.

$$\text{Grafik}(f) = \{(x, f(x)): x \in [a, b)\}$$

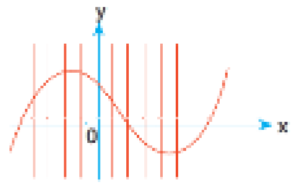
biçiminde ortak özellik yöntemiyle de gösterilebilir.



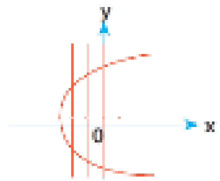
Şekilde grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun
Tanım kümesi, [a, b)
Görüntü kümesi, [c,d) yarı açık aralığıdır.

Düşey Doğru Testi

Bir fonksiyon grafiğinde, fonksiyonun x ekseni üzerinde tanımlı olduğu noktalara y eksenine paralel doğrular çizildiğinde bu doğrular grafiği yalnız bir noktada kesiyor ise bu grafiğe fonksiyon grafiği denir ve yapılan bu işleme de düşey doğru testi denir.



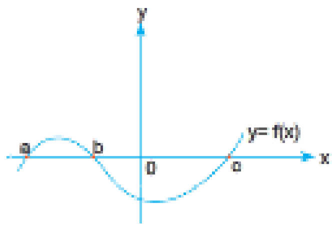
Fonksiyon belirtir ✔



Fonksiyon belirtmez ✖

Bir Fonksiyonunun Sıfırı

Bir fonksiyon grafiğinin x eksenini kesen noktalara fonksiyonun sıfırı denir.



Şekildeki fonksiyon grafiğinde x eksenini kesen noktaların apsisleri a, b ve c değerleri için f(a) = 0

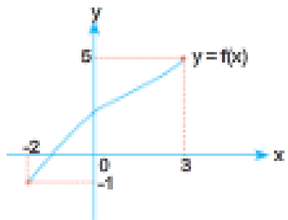
f(b) = 0

f(c) = 0

biçimindedir ve bu noktalar y = f(x) fonksiyonunun sıfırlarıdır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



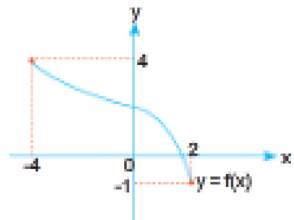
Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun tanım kümesini yazınız.

Çözüm:

Grafiğin x ekseninde tanımlı olduğu aralığı bulalım.

Buna göre, tanım kümesi [–2, 3] tür.

2. Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun görüntü kümesini yazınız.

Çözüm:

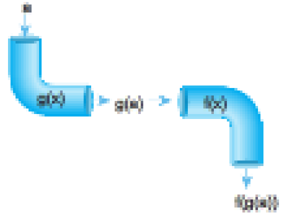
Grafiğin y ekseninde tanımlı olduğu aralığı bulalım.

Buna göre, görüntü kümesi [–1, 4] tür.

İki Fonksiyonun Bileşkesi - 1

f ve g birer fonksiyon olmak üzere,
f fonksiyonunun içine g fonksiyonunun yazılmasıyla oluşan fonksiyona **fog fonksiyonu** denir ve **"f bileşke g fonksiyonu"** olarak okunur.

Buna göre,
fog(a) = f(g(a))
biçimindedir diyebiliriz.



Bileşke Fonksiyon Makinesi

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **f ve g fonksiyonları için,**

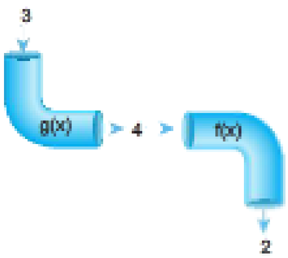
f(4) = 2
g(3) = 4

olduğuna göre, f(g(3)) kaçtır?

Çözüm:

f(g(3)) te g(3) yerine 4 yazıp f(4) ü elde ettiğinize dikkat ediniz.
f(g(3)) = f(4) = 2

2. Şekilde fog bileşke fonksiyon makinesi verilmiştir.



Buna göre, fog(3) değeri kaçtır?

Çözüm:

Bileşke fonksiyon makinesine 3 attığımızda çıkan sonuç istenmektedir.

(fog)(3) = f(g(3))
= f(4)
= 2

ÖĞRENCİ SORULARI

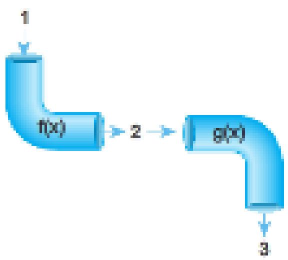
1. f ve g fonksiyonları için,

f(1) = 2
g(2) = 3

olduğuna göre, gof(1) kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Şekilde gof bileşke fonksiyon makinesi verilmiştir.



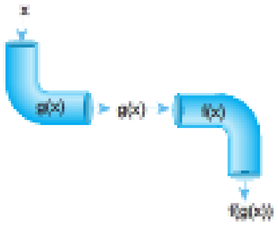
Buna göre, g(f(1)) kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

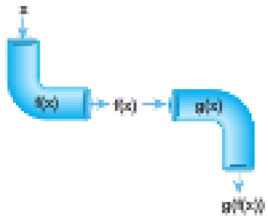
1-C **2-C**

İki Fonksiyonun Bileşkesi - 2

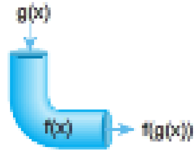
f(x) ve g(x) birer fonksiyon olmak üzere,
f(x) fonksiyonunda x yerine g(x) fonksiyonu yazıldığında
f(g(x)) = fog(x) fonksiyonu oluşur.
Benzer biçimde, g(x) fonksiyonunda x yerine f(x) fonksiyonu yazıldığında
g(f(x)) = gof(x) fonksiyonu oluşur.



fog Fonksiyon Makinesi



gof Fonksiyon Makinesi

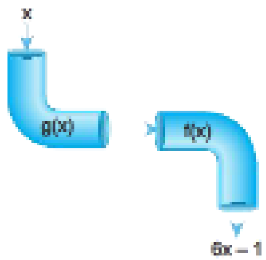


f Fonksiyon Makinesi

g Fonksiyon Makinesi

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. Şekilde fog(x) bileşke fonksiyon makinesi verilmiştir.



Buna göre, fog(2) değeri kaçtır?

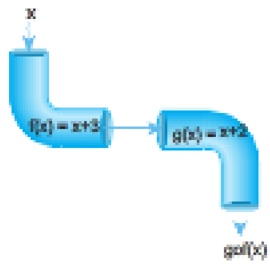
Çözüm:
Bileşke fonksiyon makinesine x atıldığında sonuç 6x – 1 çıkmaktadır.
6 . 2 – 1 = 11

2. $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = x + 2$
olduğuna göre, f(g(1)) kaçtır?

Çözüm:
g(1) i bulduktan sonra çıkan sonucu f te x yerine yazalım.
f(g(1)) = f(3)
$= 3^2 + 1$
$= 10$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Şekilde gof(x) bileşke fonksiyon makinesi verilmiştir.



Buna göre, gof(2) değeri kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2. g(x) = 3x + 2
f(x) = x – 1
olduğuna göre, gof(4) kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

1-B 2-E

İki Fonksiyonun Bileşkesi

f, g ve h fonksiyonları gerçel sayılarda tanımlı sabit olmayan fonksiyon ve f bire bir olmak üzere,

$fog(x) = foh(x)$

ise $g(x) = h(x)$ tir.

Örneğin,

$f(3x + 4) = f(g(x))$ ise $g(x) = 3x + 4$ tür.

Ayrıca fog(x) fonksiyonu ile gof(x) fonksiyonları genel olarak birbirlerine eşit değillerdir.

$fog(x) \neq gof(x)$

Örneğin,

$f(x) = 3x + 4$

$fog(x) = 6x - 2$

fonksiyonları verilsin.

Buna göre, g(x) fonksiyonunu bulalım.

$f(x) = 3x + 4$ fonksiyonunda x yerine g(x) yazdığımızda fog(x) fonksiyonunu elde ederiz.

$f(g(x)) = 3.g(x) + 4$

soruda bize $fog(x) = 6x - 2$ verildiğinden bu iki ifadeyi birbirine eşitleyerek g(x) fonksiyonu elde ederiz.

$3.g(x) + 4 = 6x - 2$

$3.g(x) = 6x - 6$

$g(x) = 2x - 2$ olur.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **f, bire bir olmak üzere,**

$fog(x) = f(4x - 1)$

olduğuna göre, g(x) fonksiyonunun eşiti ne olabilir?

Çözüm:

$f(g(x)) = f(4x - 1)$

$g(x) = 4x - 1$

2. $f(x + 4) = x^2 - 5x + 1$

olduğuna göre, f(7) kaçtır?

Çözüm:

x + 4 ün 7 ye eşit olduğunu düşünerek x yerine 3 yazalım.

$f(3 + 4) = 3^2 - 3 . 5 + 1$

$f(7) = 9 - 15 + 1$

$= -5$

3. $fog(x + 3) = 2x + 1$

olduğuna göre, fog(8) kaçtır?

Çözüm:

x + 3 ün 8 e eşit olduğunu düşünerek x yerine 5 yazalım.

$fog(5 + 3) = 2 . 5 + 1$

$fog(8) = 11$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **Bire bir f fonksiyonu için,**

$f(g(x)) = f(x^2 + 1)$

olduğuna göre, g(2) değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. **Bire bir f fonksiyonu için,**

$fog(x) = f(2x + 3)$

olduğuna göre, g(1) kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3. $f(x) = 2x + 3$

$fog(x) = 4x + 1$

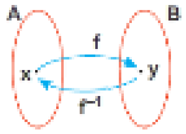
olduğuna göre, g(x) nedir?

A) $2x - 3$ B) $2x - 2$ C) $2x - 1$ D) $2x$ E) $2x + 1$

1-E	2-A	3-C

Bir Fonksiyonun Tersi

f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,



A dan B ye tanımlı f fonksiyonu için

$$f(x) = y \text{ ise } f^{-1}(y) = x$$

ifadesine f nin ters görüntüsü ya da f fonksiyonunun tersi denir.

Örneğin, $f(1) = 2$ ise $f^{-1}(2) = 1$

$f(A) = B$ ise $f^{-1}(B) = A$

$f(2x + 1) = 3x - 4$ ise $f^{-1}(3x - 4) = 2x + 1$ diyebiliriz.

Örneğin,

$f(x + 2) = x$

ise $f^{-1}(3)$ değerini bulalım.

$f(x + 2) = x$

fonksiyonunda x + 2 ile x yer değiştirdiğinde

$f^{-1}(x) = x + 2$

elde edilir.

x yerine 3 yazdığımızda

$f^{-1}(3) = 3 + 2$

$= 5$ bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **f, bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(4) = 3$

ise $f^{-1}(3)$ kaçtır?

Çözüm:

f te 4 ile 3 yer değiştirdiğinde f nin tersi bulunmuş olur.

$f^{-1}(3) = 4$

2. **f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f^{-1}(1) = 2$

$f^{-1}(a - 3) = 2$

ise a kaçtır?

Çözüm:

$a - 3 = 1$

$a = 4$

3. **f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(3) = 7$

$f^{-1}(7) = m + 1$

ise m kaçtır?

Çözüm:

f te 3 ile 7 yer değiştirdiğinde f nin tersi bulunur.

$f^{-1}(7) = 3$

$m + 1 = 3$

$m = 2$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **f, bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(a + 2) = 6$

$f^{-1}(6) = 5$

ise a kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

2. **f, bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f^{-1}(4) = 11$

$f(11) = 3m - 5$

ise m değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. **f, bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(3x - 4) = x$

ise $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

A) $3x - 5$ B) $3x - 4$ C) $3x - 3$ D) $3x - 2$ E) $3x - 1$

1-B	2-C	3-B

Ters Alma Şartı

$y = f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten olmak üzere,
f fonksiyonunun tersi alınırken
I) x yalnız bırakılır.
II) x yerine $f^{-1}(x)$, $f(x)$ yerine x yazılır.

Örneğin, $f(x) = x - 3$ ise

$x = f(x) + 3$

$\downarrow \quad \downarrow$

$f^{-1}(x) = x + 3$ tür.

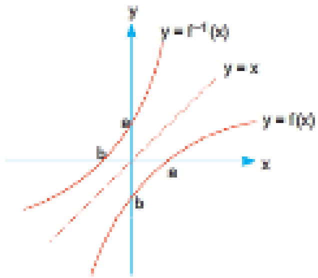
Örneğin, $f(x) = x^3 + 1$ ise

$x^3 = f(x) - 1$

$x = \sqrt[3]{f(x) - 1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ dir.

Bir fonksiyonun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği fonksiyonun tersinin grafiğine eşittir.



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(x) = x$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

Soruda x yalnız bırakılmış. x yerine $f^{-1}(x)$, $f(x)$ yerine x yazarak fonksiyonun tersini bulalım.

$f^{-1}(x) = x$

2. **f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(x) = x + 2$

fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

x yalnız bırakıldığında

$x = f(x) - 2$ olur.

Sonrasında yine x yerine $f^{-1}(x)$, $f(x)$ yerine x yazarak fonksiyonun tersini almış oluruz.

$f^{-1}(x) = x - 2$

3. **Bire bir ve örten olan bir f(x) fonksiyonu için**

$x = 2f(x) - 3$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

x yalnız bırakılmış olarak verilmiştir. Burada herhangi bir işlem yapmamıza gerek kalmadan x yerine $f^{-1}(x)$, $f(x)$ yerine x yazalım.

$f^{-1}(x) = 2x - 3$

ÖĞRENCİ SORULARI

4. **f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,**

$f(x) = 2x$

fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ nedir?

A) $x - 2$ B) $x + 2$ C) $2x$

D) $\frac{x}{2}$ E) $\frac{x}{2} - 1$

5. **f bire bir ve örten fonksiyon,**

$f(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

A) $\frac{x-1}{2}$ B) $\frac{x+1}{2}$ C) $\frac{2x-1}{3}$

D) $2x + 1$ E) $2x - 3$

6. **Bire bir ve örten olduğu değerlerde tanımlı f fonksiyonu için**

$x = \frac{f(x) - 1}{2}$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

A) $\frac{x-1}{3}$ B) $\frac{x+1}{2}$ C) $\frac{x-1}{2}$

D) $2x - 1$ E) $2x + 1$

1-D	2-A	3-C

Bazı Fonksiyonların Terslerinin Pratik Bulunuşu

f fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu değerler için,

- $f(x) = a.x$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ dır.

  Örneğin, $f(x) = 2x$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ dir.

- $f(x) = x + b$ ise $f^{-1}(x) = x - b$ dir.

  Örneğin, $f(x) = x + 3$ ise $f^{-1}(x) = x - 3$ tür.

- $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dır.

  Örneğin, $f(x) = 3x + 4$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$ dir.

- $f: R - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ olmak üzere,

  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

  Örneğin, $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x-2}$ dir.

- Bir fonksiyonun tersinin tersi kendisidir.

  $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $f(x) = x - b$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = x + b$ dir.
Buna göre,
$f(x) = x - 1$
olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:
$f(x) = x - 1$ fonksiyonunun tersini pratik olarak bulmak istediğimizde -1 yerine $+1$ yazarız.
$f^{-1}(x) = x + 1$

2. $f(x) = a.x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ dır.
Buna göre,
$f(x) = 3x$
olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:
$f(x) = 3x$ fonksiyonunun tersini pratik olarak bulmak istediğimizde 3 yerine $\frac{1}{3}$ yazarız.

$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

1. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dır.
Buna göre,
$f(x) = 2x + 3$
fonksiyonunun tersi nedir?

A) $3x + 2$ B) $3x - 2$ C) $-2x - 3$ D) $\frac{x-3}{2}$ E) $\frac{x+3}{2}$

2. **f fonksiyonu uygun aralıklarda bire bir ve örten olmak üzere,**
$f(x) = \frac{x-2}{3}$
olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ nedir?

A) $3x + 2$ B) $3x - 2$ C) $-2x - 3$ D) $\frac{x-3}{2}$ E) $\frac{x+3}{2}$

1-D 2-A

Ters Fonksiyonun Uygulamaları

f birebir ve örten fonksiyon olmak üzere,

$fof^{-1}(x) = x = I(x)$

$f^{-1}of(x) = x = I(x)$ dır. (I(x) birim fonksiyon)

Örneğin, $fof^{-1}(1) = 1$ dir.

Bu durumda bir fonksiyonda x yerine fonksiyonun tersi yazılırsa birim fonksiyon elde edilir.

Örneğin, $f(x + 2) = 3x - 1$ olsun.

x yerine x – 2 yazıldığında f(x) elde edilir.

$f(x - 2 + 2) = 3(x - 2) - 1$

$f(x) = 3x - 7$ dir.

Örneğin, $f\left(\frac{x-1}{3}\right) = x + 1$ olsun

x yerine 3x + 1 yazıldığında f(x) elde edilir.

$f\left(\frac{3x+1-1}{3}\right) = 3x + 1 + 1$

$f(x) = 3x + 2$ dir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $f(x - 1) = 2x + 3$

ise f(x) nedir?

Çözüm:

f(x – 1) ifadesini f(x) yapabilmek için x yerine x + 1 yazabilirsiniz. Bunu eşitlikte uyguladığımızda f(x) fonksiyonunu bulabiliriz.

$f(x + 1 - 1) = 2(x + 1) + 3$

$f(x) = 2x + 5$

2. $f(x + 2) = 3x + 1$

ise f(x) nedir?

Çözüm:

x yerine x –2 yazdığınızda f(x) fonksiyonunu bulabiliriz.

$f(x - 2 + 2) = 3(x - 2) + 1$

$f(x) = 3x - 5$

3. $f(3x - 2) = x$

ise f(x) nedir?

Çözüm:

f(3x – 2) ifadesinde x yerine $\frac{x+2}{3}$ yazdığımızda f(x) fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

$f\left(3 \cdot \frac{x+2}{3} - 2\right) = \frac{x+2}{3}$

$f(x) = \frac{x+2}{3}$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $f\left(\frac{x}{2}\right) = x + 4$

ise f(x) nedir?

A) 2x + 2 B) 2x + 3 C) 2x + 4 D) 2x + 5 E) 2x + 6

2. $f(5x) = 10x - 4$

ise f(x) nedir?

A) 2x – 5 B) 2x – 4 C) 2x – 3 D) 2x – 2 E) 2x – 1

3. $f(-x + 1) = 3x + 4$

ise f(x) nedir?

A) –3x + 3 B) –3x + 5 C) –3x + 7 D) –3x + 9 E) –3x + 11

1-C 2-B 3-C