11. SINIF İLERİ DÜZEY MATEMATİK KONU ÖZETİ

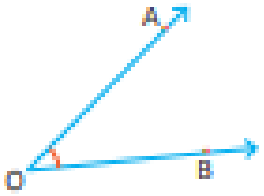
TRİGONOMETRİ
ANALİTİK GEOMETRİ
FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR

TRİGONOMETRİ

AÇI AVRAMI VE BİRİM ÇEMBER

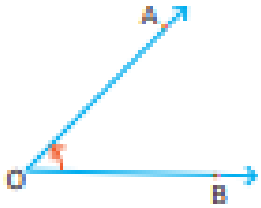
Açı

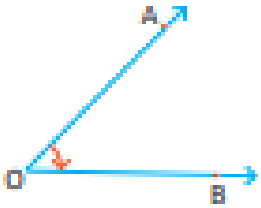
Düzlemde başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine açı denir. Bu iki ışına açının kenarları, ışınların başlangıç noktasına da açının köşesi denir.



Yönlü Açılar

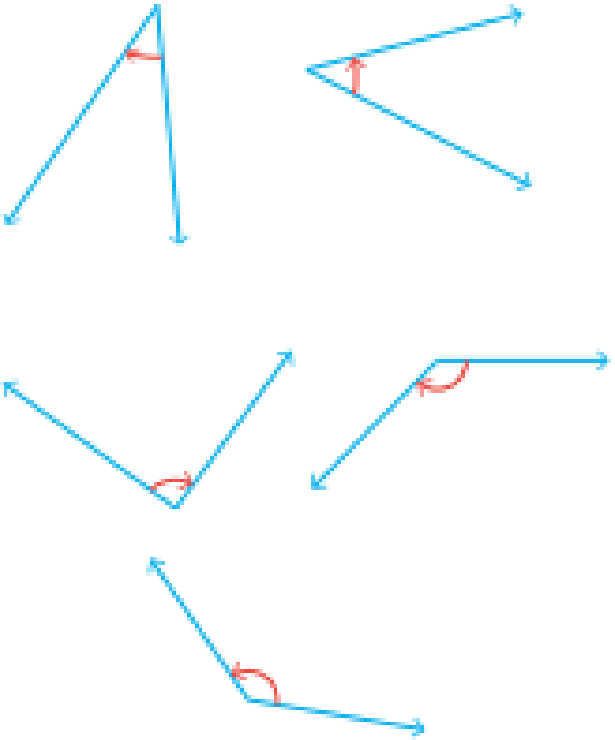
Bir kenarı başlangıç diğer kenarı bitiş kenarı olarak kabul edilen açıya yönlü açı denir. Yönlü açılarda başlangıç kenarı sabit bitiş kenarı hareketlidir. Bitiş kenarı saatin dönme yönünün tersi yönde hareket eden açıya pozitif yönlü açı, saatin dönme yönü ile aynı olan açıya negatif yönlü açı denir.





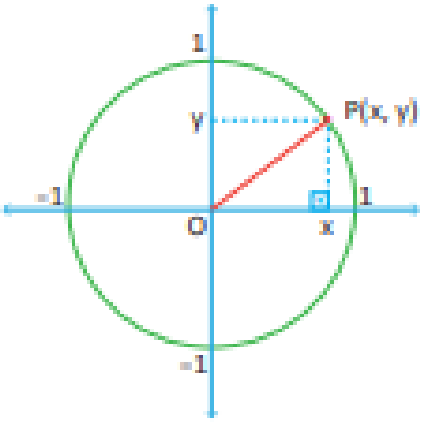
Örnek

Aşağıda verilen açıların yönlerini araştıralım.



Birim Çember

Analitik düzlemde merkezi orijin olan ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir.

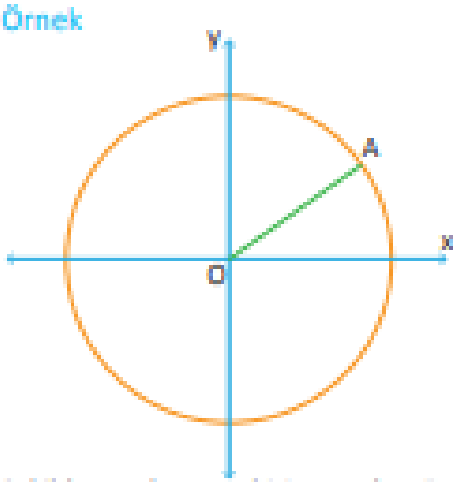


P(x, y) noktası birim çember üzerinde olduğundan, $x^2 + y^2 = 1$ olur.

Örnek

$A\left(x, \frac{2}{3}\right)$ noktası birim çember üzerinde bir nokta olduğuna göre, x in alacağı değerleri bulalım.

Örnek



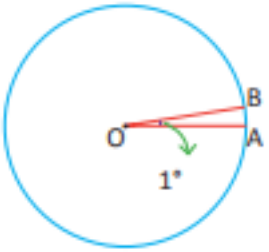
Şekilde A noktasının birim çember üzerindedir. A noktasının x eksenine uzaklığı $\frac{\sqrt{3}}{2}$ br ise y eksenine uzaklığı kaç birimdir?

AÇI ÖLÇÜ KAVRAMLARI

Bir açının ölçümü açının kolları arasındaki açıklığın belirlenmesi ile yapılır.

Derece

Bir tam çember yayının 360 eş parçaya bölünmesiyle elde edilen yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 derece denir ve 1° şeklinde gösterilir. Bu durumda bir çember yayının ölçüsü 360° dir.



Dakika

Derecenin $\frac{1}{60}$ ine 1 dakika denir ve 1' biçiminde gösterilir.

Dakika

Dakikanın $\frac{1}{60}$ ine 1 saniye denir ve 1'' biçiminde gösterilir.

1° = 60' = 3600'' dir.

Örnek

Ölçüsü 3° 15' 20'' olan açının saniye cinsinden ölçüsünü bulalım.

Örnek

Ölçüsü 22 500 saniye olan açının ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden yazalım.

Örnek

$m(\widehat{A}) = 21° 32' 44''$ ve $m(\widehat{B}) = 18° 43' 57''$ ise, aşağıdaki işlemleri yapalım.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) =$

$m(\widehat{A}) - m(\widehat{B}) =$

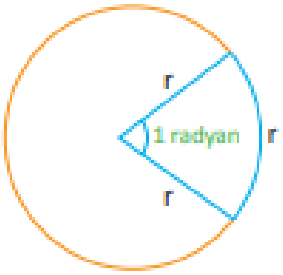
$3 \cdot m(\widehat{A})$

$\frac{m(\widehat{B})}{2}$

$\frac{m(\widehat{A})}{2}$

Radyan

Bir çemberde yarıçap uzunluğuna eşit yayın uzunluğunu gören merkez açının ölçüsünüe 1 Radyan denir ve 1^R biçiminde gösterilir.



r birim yay uzunluğu — 1 radyan ise

$2\pi r$ yay uzunluğu — x radyandır.

$r \cdot x = 2\pi r \Rightarrow x = 2\pi$ olur.

Bu durumda bir çember yayının ölçüsü 2π radyandır.

Bir açının ölçüsü derece cinsinden D, Radyan cinsinden R ise,

$360°$ — 2π radyan ise,

D — R radyandır.

$D \cdot 2\pi = R \cdot 360°$

$$\frac{D}{360°} = \frac{R}{2\pi}$$

$$\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

Örnek

Aşağıda verilen açıların ölçülerini radyan cinsinden bulalım.

$90°$

$120°$

$-150°$

$330°$

Örnek

1 radyanlık bir açının ölçüsü kaç derecedir?

Örnek

Aşağıda verilen açıların ölçülerini derece cinsinden bulalım.

$\frac{\pi}{6}$

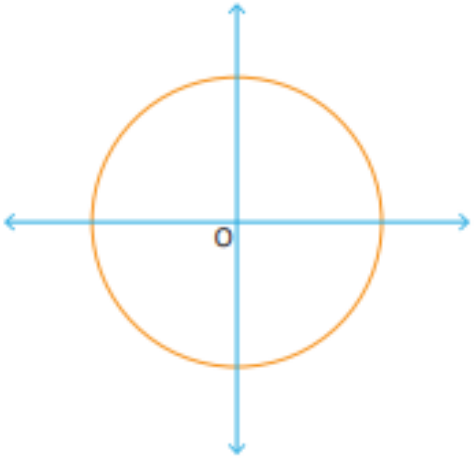
$\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{4}$

ESAS ÖLÇÜ

Örnek

Ölçüsü 30°, 390°, ve 750° olan açıları birim çember üzerinde gösterelim.



Tanım

Birim çember üzerinde başlangıç kenarları Ox ekseni ve bitim kenarları aynı olan açılardan ölçüsü [0°, 360°) olan açıya bu açıların esas ölçüsü denir.
Bucdurumda, $k \in Z$ olmak üzere,
ölçüsü $\alpha + k \cdot 360°$ olan açının esas ölçüsü α derece,
ölçüsü $\theta + k \cdot 2\pi$ olan açının ölçüsü θ radyandır.

Örnek

Esas ölçüsü 52° olan üç tane açıyı yazalım.

Aklınızda bulunsun!

Derece cinsinden verilen bir açının 360° bölümünden kalan o açının esas ölçüsüdür.

Örnek

Ölçüsü 1520° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Örnek

Ölçüsü −1240° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Aklınızda bulunsun!

Radyan cinsinden verilen bir açının 2π ye bölümünden kalan o açının esas ölçüsüdür.

Örnek

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulalım.

27π

-24π

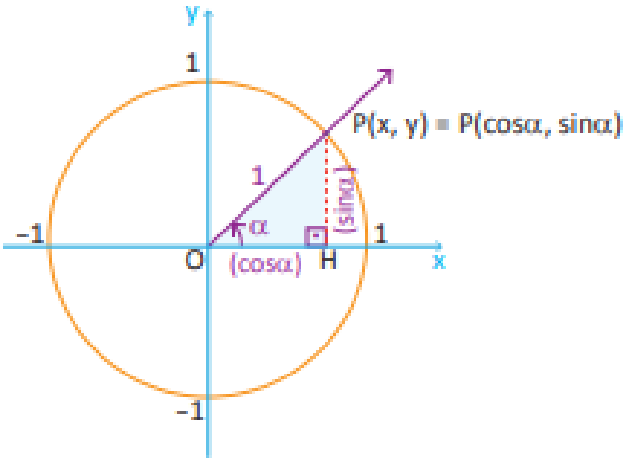
$\frac{32\pi}{5}$

$\frac{17\pi}{9}$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonları

Birim çember üzerinde bir P(x, y) noktasını orijinle birleştiren [OP nın x ekseniyle yatığı açı α olsun.



P noktasının apsisine α açısının kosinüsü denir ve cosα ile gösterilir. x = cosα

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

P noktasının ordinatına α açısının sinüsü denir ve cosα ile gösterilir. y = sinα

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

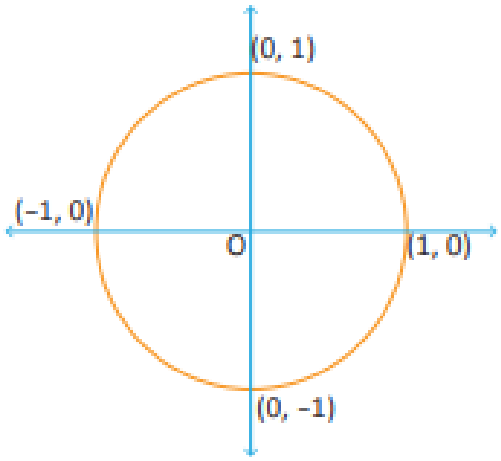
Şekilde OPH dik üçgeninde pisagor bağıntısından

$|OH|^2 + |PH|^2 = |OP|^2$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ bağıntısı elde edilir.

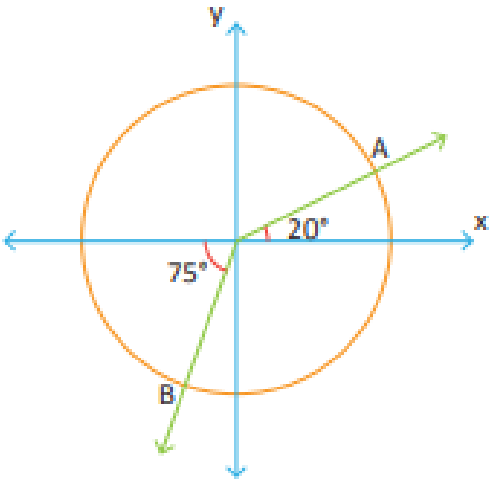
Örnek

Birim çember 0°, 90°, 270° ve 360° lik açıların sinüs ve kosinüs değerlerini bulalım.



Örnek

Aşağıda birim çember üzerinde verilen A ve B noktalarının koordinatlarını bulalım.



Örnek

$x \in R$ için $3 + 2\sin x$ ifadesinin en büyük değeri ile en küçük değerini bulalım.

Örnek

x ve y farklı reel sayı değerleri olmak üzere,

A = 2sinx – 5cosy ifadesinin en küçük tam sayı değeri nedir?

Örnek

$\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} - \cos x$ ifadesinin değerini bulalım.

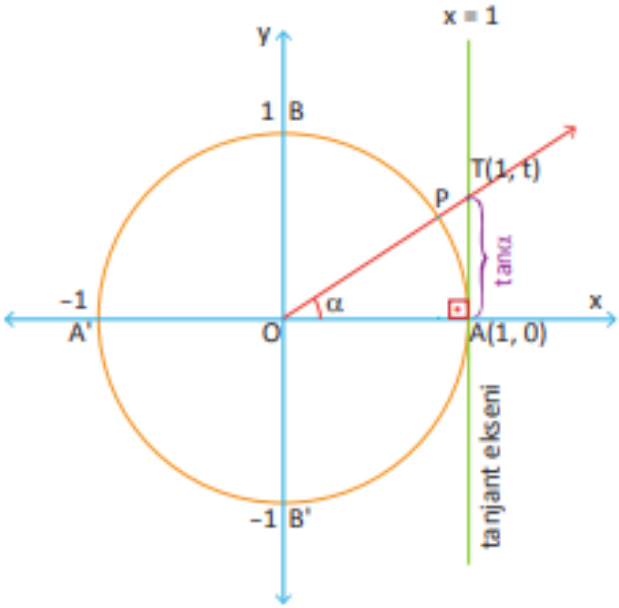
Örnek

$\frac{3 + \sin^2 x}{\cos x - 2} + 2$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Örnek

$\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{6 - 3\sin^2 x}$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Tanjant Fonksiyonu



Birim çember üzerinde bir P(x, y) noktasını orijinle birleştiren [OP nın x ekseniyle yaptığı açı α olsun. OP ışınının x = 1 doğrusunu kestiği T(1, t) noktasının ordinatına α açısının tanjantı denir ve tanα ile gösterilir.

OAT dik üçgeninde $\tan\alpha = \frac{|TA|}{|OA|} = \frac{|TA|}{1} = |TA| = t$ dir.

Bu durumda x = 1 doğrusuna tanjant ekseni denir.

Örnek

Aşağıda verilen açıların tanjant değerlerini bulalım.

$\tan\frac{\pi}{2} =$

$\tan\pi =$

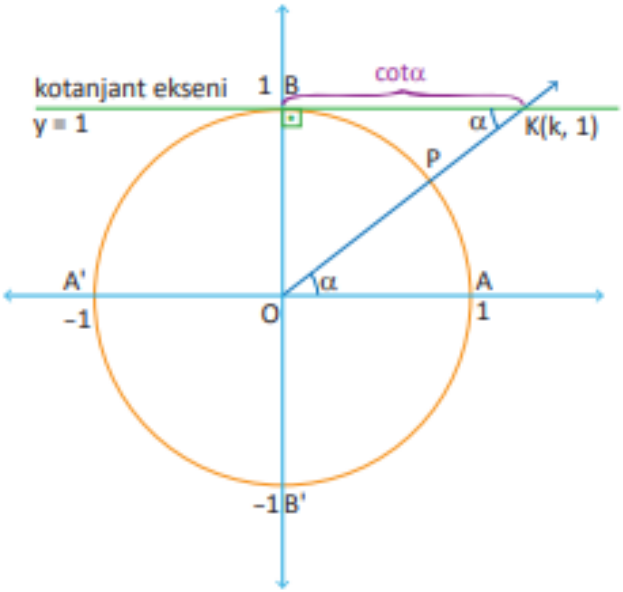
$\tan\frac{3\pi}{2} =$

$\tan 2\pi =$

Aklınızda bulunsun!

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Kotanjant Fonksiyonu



OP ışınının y = 1 doğrusunu kestiği K(k, 1) noktasının apsisine α açısının kotanjantı denir ve cotα ile gösterilir.

OBK dik üçgeninde $\cot\alpha = \frac{|KB|}{|OB|} = \frac{|KB|}{1} = |KB| = k$

Bu durumda x = 1 doğrusuna tanjant ekseni denir.

Örnek

Aşağıda verilen açıların tanjant değerlerini bulalım.

$\cot\frac{\pi}{2} =$

$\cot\pi =$

$\cot\frac{3\pi}{2} =$

$\cot 2\pi =$

Aklınızda bulunsun!

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Örnek

$\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ ifadesinin en sade hali nedir?

Örnek

$\frac{2\sin x - 3\cos x}{\cos x + 5\sin x} = \frac{1}{2}$ eşitliğine göre, tanx kaçtır?

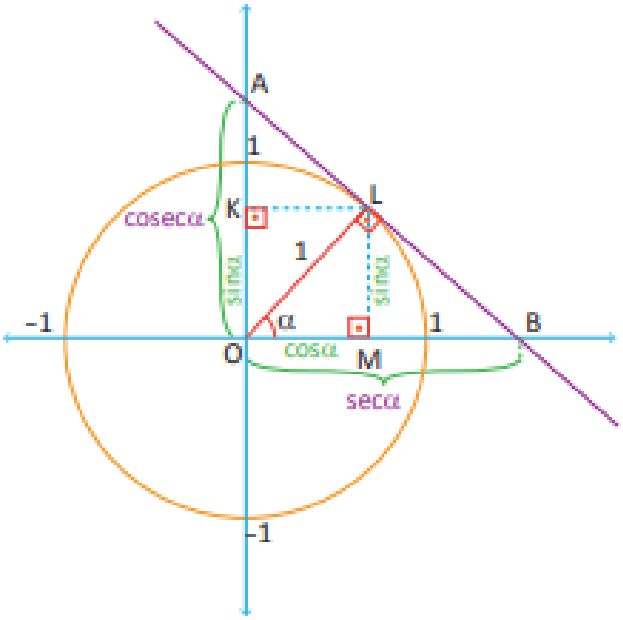
Örnek

$\tan^2 x + \cot^2 x = 2$ eşitliğine göre, tanx + cotx kaçtır?

Örnek

$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x}$ ifadesinin en sade hali nedir?

Sekant ve KosekantFonksiyonu



Birim çemberde L noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği B noktasının apsisine açısının sekantı denir ve sec α ile gösterilir. L noktasından çizilen teğetin y eksenini kestiği A noktasnın ordinatına α açısının kosekantı denir ve cosecα ile gösterilir. Şekilde LOM ile BOL üçgenleri benzerdir. (A.A.A) Benzerlik oranını yazarsak,

$$\frac{|OM|}{|OL|} = \frac{|OL|}{|OB|}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$ elde edilir.

Aynı şekilde LOK ile AOL üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|OK|}{|OL|} = \frac{|LO|}{|AO|}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$ elde edilir.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulalım.

$1 + \tan^2 x$

$1 + \cot^2 x$

Örnek

$\frac{1 - \sec\alpha}{\sin\alpha} \cdot (1 + \cos\alpha)$ ifadesinin eşitini bulalım.

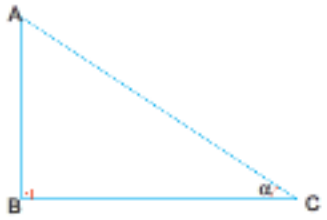
Örnek

$\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$ ifadesinin eşitini bulalım.

DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

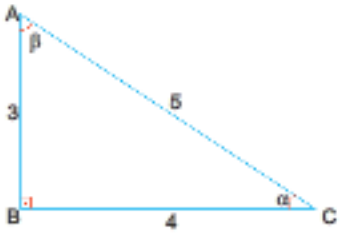
BİLGİ

5.1 - Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar



$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$, $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$

$\tan\alpha = \frac{|AB|}{|BC|}$, $\cot\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$

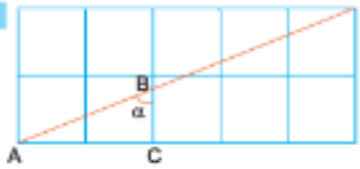


$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\cot\alpha = \frac{4}{3}$

$\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\tan\beta = \frac{4}{3}$, $\cot\beta = \frac{3}{4}$ tür.

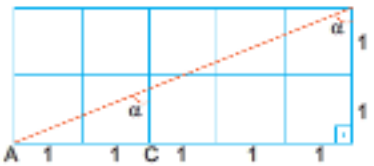
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1.



Yandaki şekil özdeş birim karelerden oluşmaktadır. $m(A\hat{B}C) = \alpha$ **olduğuna göre, $\tan\alpha$ kaçtır?**

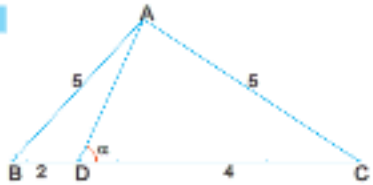
Çözüm:



α açısı paralellikten kaydırılıp yeni bir üçgen oluşturulur.

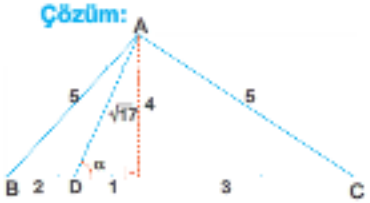
$\tan\alpha = \frac{5}{2}$ bulunur.

2.



ABC üçgeninde $m(A\hat{D}C) = \alpha$
$|AB| = |AC| = 5$ cm
$|BD| = 2$ cm
$|DC| = 4$ cm ise,
$\sin\alpha$ kaçtır?

Çözüm:



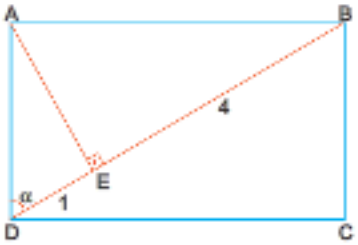
Buna göre,

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

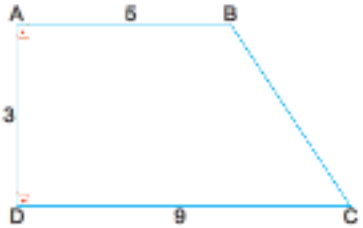
1.



ABCD bir dikdörtgen
$[BD] \perp [AE]$
$m(A\hat{D}E) = \alpha$
olduğuna göre,
$\cot\alpha$ kaçtır?

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 4 E) $\frac{5}{4}$

2.



ABCD dik yamuk
$|DC| = 9$ br
$|AD| = 3$ br
$|AB| = 5$ br
olduğuna göre,
$\cos(B\hat{C}D)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

1-B **2-D**

BİLGİ

5.3 - Özel Üçgenlerde Trigonometrik Bağıntılar

I.) 30° ve 60° nin Trigonometrik Oranları

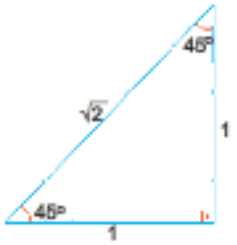
$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$

II.) 45° nin Trigonometrik Oranları



$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \cot 45° = 1$

bulunur.

Açı (α)	0	90°	180°	270°	360°
sinα	0	1	0	–1	0
cosα	1	0	–1	0	1
tanα	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0
cotα	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $\cos 150°$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm:

$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

2. $\frac{\tan 225°.\sin 150°}{\cos 300°.\cot 315°}$ **ifadesinin sonucu kaçtır?**

Çözüm:

$= \frac{\tan 45°.\sin 30°}{\cos 60°.(-\cot 45°)}$

$= \frac{1 \,.\, \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \,.\, -1} = -1$ bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin(135\pi)$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 3

3. $\frac{\sin 135°.\cot 330°}{\tan 60°.\cos 225°}$ **ifadesinin sonucu kaçtır?**

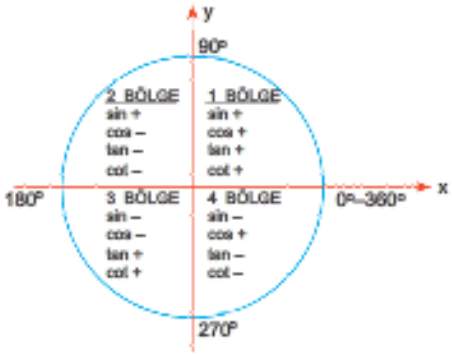
A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1-B **2-A** **3-C**

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İŞARETLERİ

BİLGİ

3.5 - Trigonometrik İfadelerde İşaret İnceleme



- Bütün / Sınıf / Kara Tahtada / Coşar

I. Bölge	II. Bölge	III. Bölge	IV. Bölge
Hepsi +	sin +	tan +	cos +
		cot +	

olarakta akıllarda yer alabilir.

- cosinüs fonksiyonu çift fonksiyondur. (f(x) = f(–x))
  cos(–x) = cosx dir.
  cos(–40°) = cos40°
- sinüs, tan ve cot fonksiyonlan tek fonksiyondur.
  sin(–x) = –sinx (–f(x) = f(–x))
  tan(–x) = –tanx
  cot(–x) = –cotx

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1.

a = sin200°
b = cos340°
c = tan150°

olduğuna göre, a, b ve c nin işaretlerini bulunuz.

Çözüm:

Bölgelerinden hareketle

a = sin200° (3. Bölge –)
b = cos340° (4. Bölge +)
c = tan150° (2. Bölge –)

2.

$a = \sin\left(\frac{23\pi}{4}\right)$
$b = \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$
$c = \tan\left(\frac{39\pi}{5}\right)$
$d = \cot\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$

ifadelerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm:

$a = \sin\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ (4. Bölge –)
$b = \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (1. Bölge +)
$c = \tan\left(\frac{19\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ (4. Bölge –)
$d = \cot\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (1. Bölge +)

ÖĞRENCİ SORULARI

1.

a = sin(–340°)
b = cos (–970°)
$c = \tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$
d = cot (–2000°)

a, b, c ve d nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) +, –, –, – B) +, –, +, + C) +, –, +, –
D) +, +, –, – E) +, +, –, +

2.

a = sin1540°
$b = \cos\left(\frac{29\pi}{5}\right)$
c = cot(–200°)
d = tan(–1950°)

a, b, c ve d nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) +, –, –, + B) +, +, +, – C) +, –, +, –
D) –, +, +, – E) +, +, –, +

1-C **2-E**

DAR AÇILARDA SIRALAMA

BİLGİ

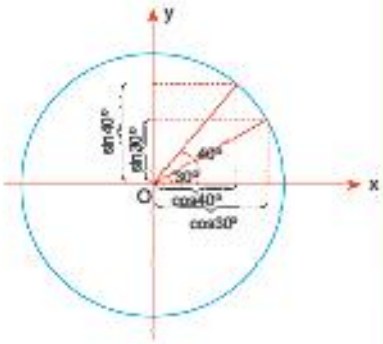
3.4 - Dar Açılarda Sıralama

- Şekli dikkatli inceleyecek olursak $\sin 30° < \sin 40°$
  $\cos 40° < \cos 30°$ olduğu görülür.

O halde dar açılarda sinx fonksiyonu için açısı büyük olan büyüktür. cosx fonksiyonu için açısı büyük olan küçüktür.

NOT : $a + b = 90°$ ise, birbirini 90° ye tamamlayan açılarda sinüs fonksiyonu cosinüse ya da cosinüs fonksiyonu sinüse dönüşür. $\sin a = \cos b$ veya $\cos a = \sin b$

Örneğin; $\underbrace{\sin 50° = \cos 40°}_{90°}$, $\underbrace{\cos 25° = \sin 65°}_{90°}$



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

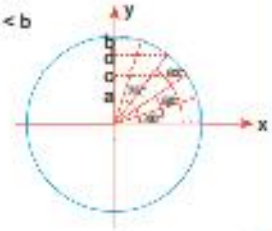
1. $a = \sin 40°$
$b = \sin 75°$
$c = \sin 50°$
$d = \sin 62°$
ifadelerinin sıralaması nedir?

Çözüm:

Yukarıda belirttiğimiz gibi sinüs fonksiyonunda açısı büyük olan büyük olduğundan,

$a < c < d < b$

sıralaması elde edilir.
İfadeler birim çembere aktarılarakta bulunabilir.



2. $x = \cos 40°$
$y = \sin 75°$
$z = \cos 52°$
$t = \sin 18°$
ifadelerinin sıralaması nedir?

Çözüm:

$x = \cos 40°$
$y = \sin 75° = \cos 15°$
$z = \cos 52°$
$t = \sin 18° = \cos 72°$
fonksiyonları aynı yaptık. O halde cosinüs fonksiyonunda açısı küçük olan büyük olacağı için sıralama,

$t < z < x < y$ dır.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $a = \cos 45°$
$b = \cos 12°$
$c = \cos 27°$
$d = \cos 83°$
ifadelerinin doğru sıralaması nedir?

A) $b < c < a < d$
B) $c < d < a < b$
C) $d < a < c < b$
D) $a < c < d < b$
E) $a < d < c < b$

2. $a = \sin 47°$
$b = \cos 43°$
$c = \sin 17°$
$d = \cos 57°$
ifadelerinin doğru sıralaması nedir?

A) $b < a < c < d$
B) $a = b < d < c$
C) $c < a = b < d$
D) $d < c < b < a$
E) $c < d < b = a$

1-C **2-E**

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARDA SIRALAMA

Trigonometrik fonksiyonları açı değerlerine göre sıralarken verilen açıların trigonometrik değerini dar açı sinsinden ifade ederiz.

Verilen açıların trigonometrik değerleri arasında büyüklük - küçüklük ilişkisini belirleyebilmek için trigonometrik değerler dikey eksenlere (sinüs, tanjant) veya yatay eksenlere (kosinüs, kotanjant) taşınır.

Örnek

a = cos67°, b = tan53°, c = cot67° açı değerlerini büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

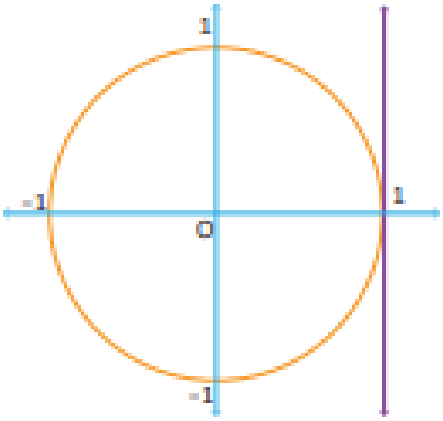
Aklınızda bulunsun!

1. bölgede açı değerleri arttıkça sünüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.

1. bölgede bir açının tanjant değeri sinüs değerinden daima büyüktür.

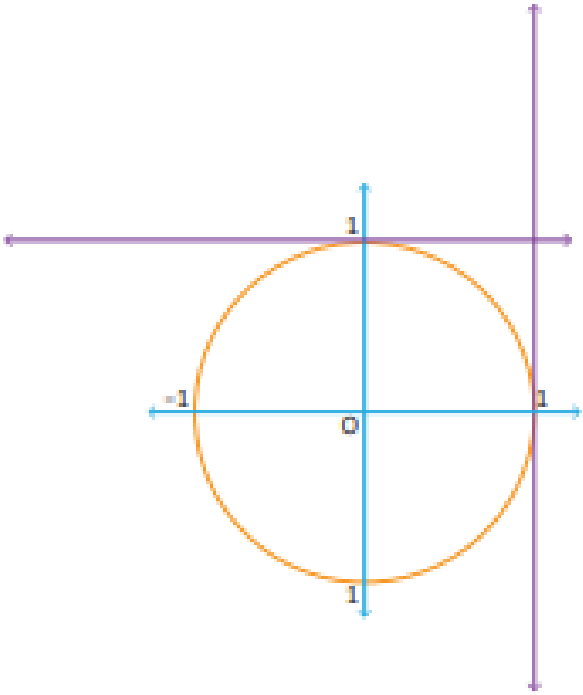
Örnek

a = sin155°, b = tan320°, c = cot160° ve d = cos130° açı değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayalım.



Örnek

a = sin200°, b = cos285°, c = tan240° ve d = cot320° açı değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayalım.



TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER

BİLGİ

4 - Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

1. $x^2 + y^2 = 1$ Birim çemberin denklemi

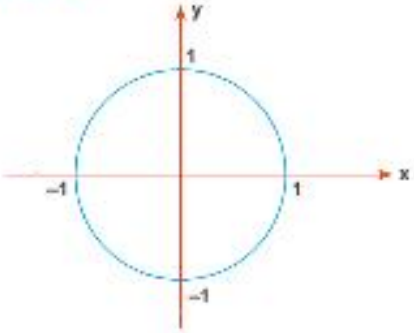
$x = \cos\alpha$ ve $y = \sin\alpha$ olduğundan

$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$

2. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ve $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\boxed{\tan\alpha.\cot\alpha = 1}$

3. $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}}$ ve $\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}}$



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{3}$

olduğuna göre, sinx.cosx ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\underbrace{\sin^2 x - 2\sin x.\cos x + \cos^2 x}_{1} = \dfrac{1}{9}$

$1 - \dfrac{1}{9} = 2\sin x.\cos x$

$\sin x.\cos x = \dfrac{4}{9}$ bulunur.

2. $\dfrac{2\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} = \dfrac{3}{5}$

olduğuna göre, tanx kaçtır?

Çözüm:

$\dfrac{2\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} = \dfrac{3}{5}$

$10\sin x - 5\cos x = 3\sin x + 6\cos x$

$7.\sin x = 11.\cos x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{11}{7}$

$\tan x = \dfrac{11}{7}$ bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $\tan x + \cot x = 3$ **ise,** $\tan^2 x + \cot^2 x$ **ifadesinin sonucu kaçtır?**

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

2. $\dfrac{\cos^2 a - 1}{\sin^2 a}$ **ifadesinin sonucu nedir?**

A) –sina B) cosa C) $\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) –1

3. $\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x} = 8$ **ifadesine göre, cosx in pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

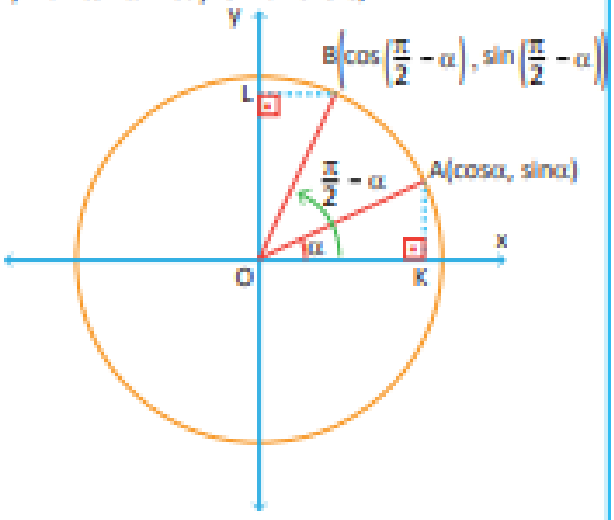
A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{2}{5}$

1-B	2-E	3-B

BÖLGELERE GÖRE TRİGONOMETRİK ORANLAR

$k\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ açısının trigonometrik değerleri

i) k bir tek tam sayı olmak üzere,



$\widehat{OLB} = \widehat{OKA}$ eşliğinden,

$|BL| = |AK| \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$|OL| = |OK| \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

Bu durumda,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$

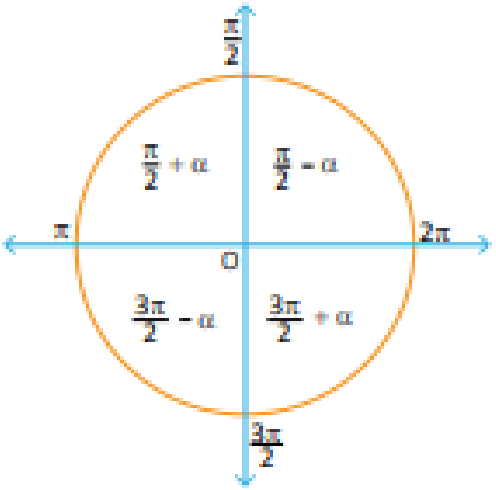
$k\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ açısında k bir tek sayı ise, fonksiyonun ismi değişir.

sin → cos
cos → sin
tan → cot
cot → tan

Fonksiyonun işareti bulunurken,

$k\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ açısının bulunduğu bölgenin işareti alınır.

Örnek



Birim çemberden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların eşitlerini bulalım.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

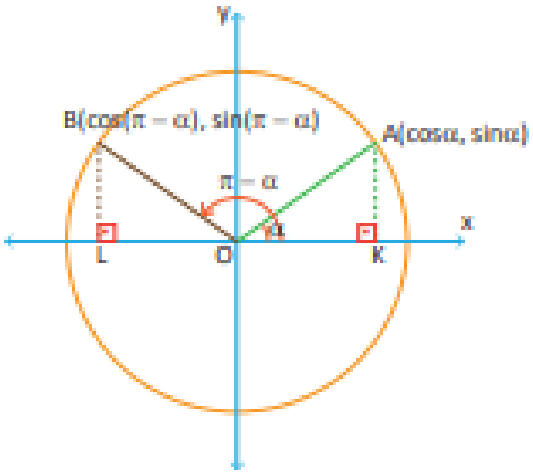
$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) =$

III) k bir çift tam sayı ve k = 2 alalım.



$\widehat{OLB} = \widehat{OKA}$ eşliğinden,

$|OK| = |OH| \Rightarrow -\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$|LB| = |KA|$

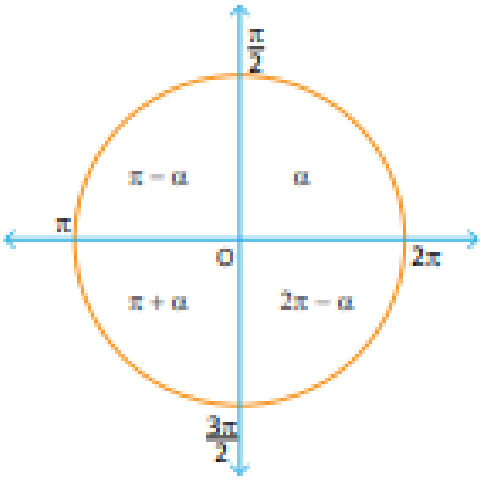
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

Buradan

$\tan(\pi - \alpha) =$

$\cot(\pi - \alpha) =$

k bir çift tam sayı olduğundafonksiyonun isimi değişmez



Birim çemberden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların eşitlerini bulalım.

$\sin(\pi + \alpha)$

$\cos(\pi + \alpha)$

$\tan(\pi + \alpha)$

$\cot(\pi + \alpha)$

$\sin(2\pi - \alpha)$

$\sin(-\alpha)$

$\cos(2\pi - \alpha)$

$\cos(-\alpha)$

$\tan(2\pi - \alpha)$

$\tan(-\alpha)$

$\cot(2\pi - \alpha)$

$\sin(3\pi + \alpha)$

$\cos(5\pi + \alpha)$

$\sin(4\pi + \alpha)$

$\tan(6\pi + \alpha)$

$\sin(8\pi - \alpha)$

$\cot(4\pi - \alpha)$

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulalım.

$\tan 120^\circ =$

$\sin 150^\circ =$

$\tan 135^\circ =$

$\cos 210^\circ =$

$\cot 225^\circ =$

$\sin 240^\circ =$

$\sin 330^\circ =$

Örnek

$\cot(5\pi + \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$

Örnek

$\cos(-\alpha) + \sin\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(-\alpha) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ?$

Örnek

$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere,

olmak üzere, $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ise, $\cos^2\theta + \tan^2\theta = ?$

Örnek

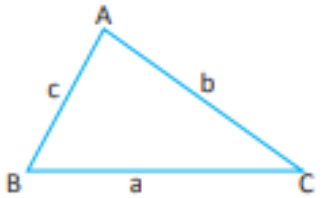
$\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere,

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$ ise, $\cos(\pi + \theta) \times \tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = ?$

KOSİNÜS VE SİNÜS TEOREMLERİ

Kosinüs Teoremi

Bir üçgende iki kenar uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açının kosinüsü verilirse üçüncü kenarı kosinüs teoreminde yararlanarak kolayca bulabiliriz.



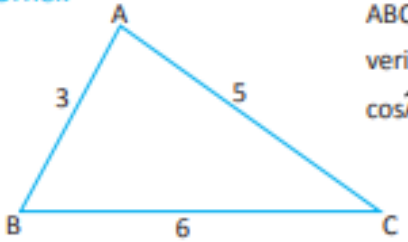
ABC nin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarları gören açılar $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve C olmak üzere,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

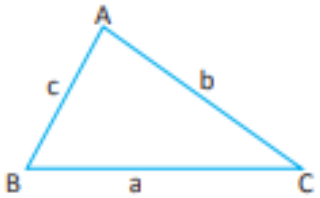
Örnek



ABC üçgeninde verilenlere göre, $\cos\hat{A}$ değeri nedir?

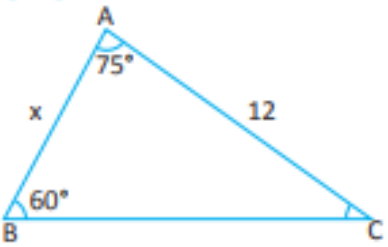
Sinüs Teoremi

Bir üçgende bir kenarın uzunluğu karşısında bulunan açının sinüs değeri ile doğru orantılıdır.



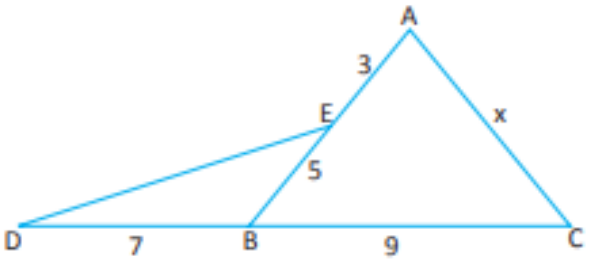
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Örnek



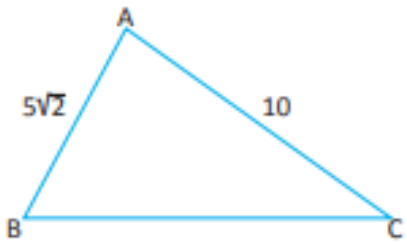
Şekildeki ABC üçgeninde |AB| = x kaç cm dir?

Örnek



B, C, D noktaları ve A, E, B noktaları doğrusal. Verilenlere göre, |AC| = x kaç birimdir?

Örnek

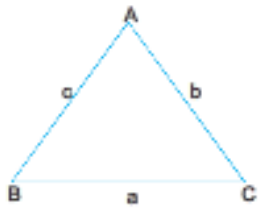


Şekildeki ABC üçgeninde |AB| = x kaç cm dir?

İKİ KENAR UZUNLUĞU VE BU KENARLAR ARASINDAKİ AÇININ ÖLÇÜSÜ VERİLEN ÜÇGENİN ALANINI HESAPLAMA

BİLGİ

6.2 - İki Kenarının Uzunluğu ve Bu Kenarlar Arasındaki Açının Ölçüsü Verilen Üçgenin Alanını Hesaplama



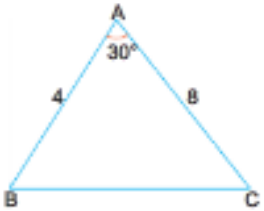
$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}.\ b.\ c.\ \sin\hat{A}$$

$$= \frac{1}{2}.\ a.\ c.\ \sin\hat{B}$$

$$= \frac{1}{2}.\ a.\ b.\ \sin\hat{C}$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1.



ABC bir üçgen
$|AB| = 4$ cm
$|AC| = 8$ cm
$m(B\hat{A}C) = 30°$

Yukarıdaki verilere göre, Alan($\widehat{ABC}$) kaç cm² dir?

Çözüm:

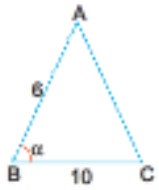
$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}.\ 4.\ 8.\ \sin 30°$$

$$= \frac{1}{2}.\ 4.\ 8.\ \frac{1}{2} = 8 \text{ cm bulunur.}$$

2. ABC bir üçgen
$|AB| = 6$ birim
$|BC| = 10$ birim
$\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$

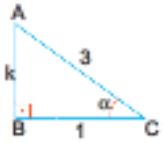
olduğuna göre, Alan($\widehat{ABC}$) kaç birim karedir?

Çözüm:



$\cos\alpha = \frac{1}{3}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ olur.



$k^2 + 1^2 = 3^2$

$k^2 = 8$

$k = 2\sqrt{2}$

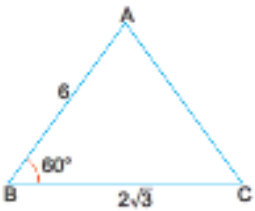
$$\text{Buna göre; Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}.\ 6.\ 10.\ \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}.\ \overset{3}{\cancel{6}}.\ \overset{5}{\cancel{10}}.\ \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10.\ 2\sqrt{2}$$

$= 20\sqrt{2}$ birimkaredir.

ÖĞRENCİ SORULARI

1.

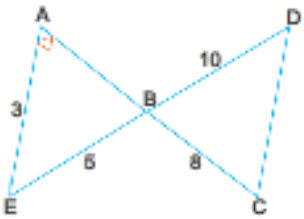


ABC bir üçgen
$|AB| = 6$ cm
$|BC| = 2\sqrt{3}$ cm
$m(A\hat{B}C) = 60°$

Yukarıdaki ABC üçgeninin alanı kaç cm² dir?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 12

2.



$[BC] \perp [BE]$
$[AC] \cap [DE] = \{B\}$
$|AE| = 3$ br
$|BE| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$|BD| = 10$ br

olduğuna göre, Alan($\widehat{BCD}$) kaç br² dir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 18 E) 24

1-D **2-E**

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI

BİLGİ

7.1 - Trigonometrik Fonksiyonların Periyotları

Grafikleri belli aralıklarla aynen tekrarlanan fonksiyonlar periyodik fonksiyonlardır.

$f: A \to B$ fonksiyonunda her $x \in A$ için

$f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde T pozitif reel sayısı var ise f fonksiyonuna periyodik fonksiyon ve T ye de fonksiyonun periyodu denir.

Fonksiyonlar $(n \in Z)$

$f(x) = k.\sin^n(ax + b)$, $f(x) = k.\cos^n(ax + b)$: n tek tam sayı ise $T = \frac{2\pi}{|a|}$; n çift tam sayı ise $T = \frac{\pi}{|a|}$

$f(x) = k.\tan^n(ax + b)$, $f(x) = k.\cot^n(ax + b)$: $T = \frac{\pi}{|a|}$

NOT : f(x) fonksiyonunun periyodu T_1, g(x) fonksiyonunun periyodu T_2 ise f(x) ∓ g(x) fonksiyonunun periyodu Ok(T_1, T_2) dir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $f(x) = 3\sin^5(4x - 1)$ **fonksiyonunun periyodu kaçtır?**

Çözüm:

$n = 5$ tek tam sayı

$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ dır.

2. $f(x) = 4.\tan^3\left(\frac{5 - 7x}{3}\right) - 5$

fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?

Çözüm:

$T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{\left|\frac{-7}{3}\right|} = \frac{3\pi}{7}$ bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $f(x) = \cos 3x - 5$ **fonksiyonunun periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{2\pi}{3}$ E) 2π

2. $f(x) = 4\sin^5(7x + 2)$ **fonksiyonunun periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{7}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{3}$

3. $f(x) = 7 - 2\tan^3(1 - 5x)$ **fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) π

1-D	2-C	3-A

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

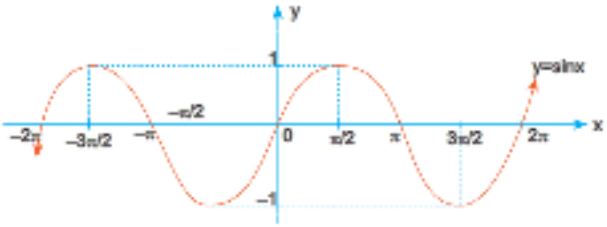
BİLGİ

7.2 - Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

1. sinx – cosx

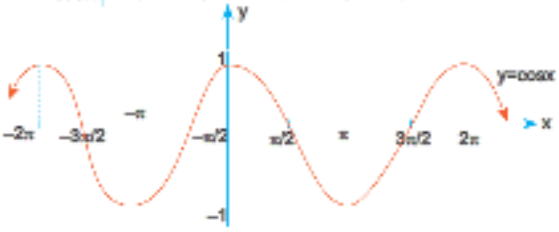
- f(x) = sinx grafiğini inceleyelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0 ↗	1 ↘	0 ↘	–1 ↗	0



- f(x) = cosx grafiğini inceleyelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1 ↘	0 ↘	–1 ↗	0 ↗	1



NOT : Grafikleri çizerken periyodlar bulunup sadece periyod aralığına göre çizim yapılırsa grafiğin devamında periyod aralığının aynısı tekrar eder.

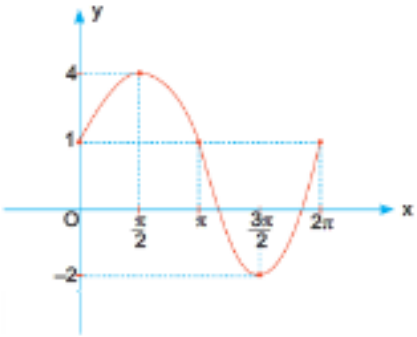
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. f(x) = 3sinx + 1 **fonksiyonunun grafiğini çiziniz?**

Çözüm:

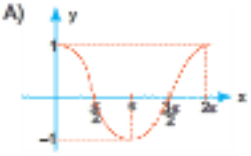
f(x) = 3sinx + 1 in periyodu $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

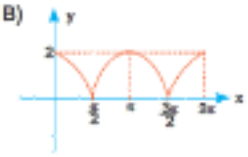
x	0	π/2	π	3π/2	2π
sinx	0	1	0	–1	0
3sinx	0	3	0	–3	0
3sinx+1	1	4	1	–2	1

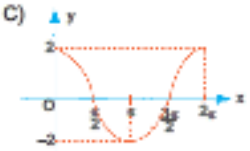


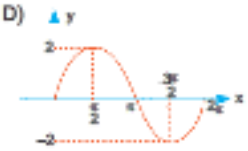
ÖĞRENCİ SORULARI

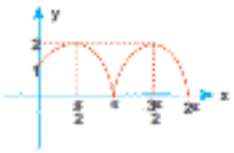
1. f(x) = 2cosx **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


B)


C)


D)


E)


1-C

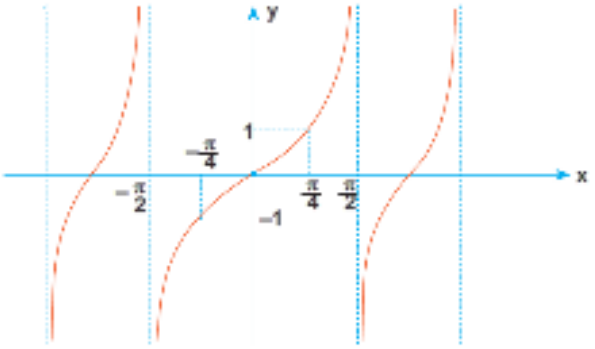
BİLGİ

7.3 - Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

2. tanx – cotx

f(x) = tanx fonksiyonunun grafiğini inceleyelim.

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
tanx	$+\infty$ | $-\infty$	-1	0	1	$+\infty$ | $-\infty$



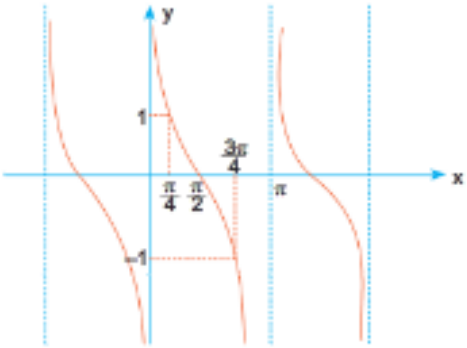
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEK

1. f(x) = cotx **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Çözüm:

f(x) = cotx fonksiyonunun periyodu π dir.

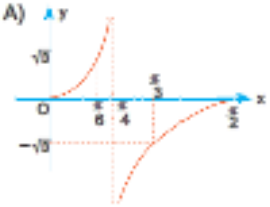
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
cotx	$-\infty$ | ∞	↘ 1	↘ 0	↘ −1	↘ $-\infty$ | ∞



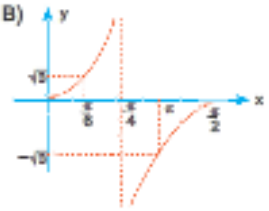
ÖĞRENCİ SORUSU

1. f(x) = tan2x **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)



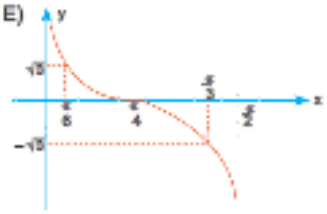
B)



C)

D)

E)



1-A

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

BİLGİ

7.4 - Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Fonksiyonun tersinden bahsedebilmek için birebir ve örten olmalıdır. Trigonometrik fonksiyonlar R den R ye birebir ve örten değildir. Uygun aralıklarla trigonometrik fonksiyonların tersini inceleyelim.

1. Sinüs Fonksiyonunun Tersi:

$\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$

2. Kosinüs Fonksiyonunun Tersi:

$\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$y = \cos x \Rightarrow x = \arccos y$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ **ifadesinin değeri nedir?**

Çözüm:

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = x$ olsun.

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

O halde $x = \frac{\pi}{3}$ olarak bulunur.

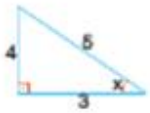
2. $\sin(2 \arccos \frac{3}{5})$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm:

$\sin(2 \underbrace{\arccos \frac{3}{5}}_{x \text{ olsun.}}) = \sin 2x$ i bulalım.

$\arccos \frac{3}{5} = x$

$\cos x = \frac{3}{5}$



O halde

$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

$= 2 . \frac{4}{5} . \frac{3}{5}$

$= \frac{24}{25}$ tir.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $\sin(\arcsin x) = \frac{1}{3}$ **ise x değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ D) $\sqrt{10}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) π B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{3}$

3. $y = \arccos\left(\frac{2x-1}{5}\right)$ **ifadesini sağlayan x tam sayıları kaç tanedir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

1-A **2-D** **3-C**

BİLGİ

7.5 - Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

3. Tanjant Fonksiyonunun Tersi:

$\arctan x : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \tan x \Rightarrow \quad x = \arctan y$

4. Kotanjant Fonksiyonunun Tersi:

$\operatorname{arccot} x : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$

$y = \cot x \Rightarrow x = \operatorname{arccot} y$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $\tan\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm:

$\tan(\underbrace{\arcsin \frac{1}{2}}_{x \text{ olsun}}) = \tan x$

$\arcsin \frac{1}{2} = x \qquad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur.

$\sin x = \frac{1}{2}$

2. $\cot\left(2\arccos \frac{1}{2}\right)$ **ifadesinin değeri nedir?**

Çözüm:

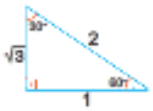
$\cot(2\underbrace{\arccos \frac{1}{2}}_{x}) = \cot 2x$

$\arccos \frac{1}{2} = x \qquad \cot 2x = \cot(2.60^\circ)$

$\cos x = \frac{1}{2} \qquad = \cot(120^\circ)$

$= -\cot(60^\circ)$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.



ÖĞRENCİ SORULARI

1. $\arctan(\sqrt{3}) + \operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{11\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{4\pi}{5}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

2. $\cos(2\arctan x)$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) $\frac{1+x}{1-x}$ B) $\frac{1}{1-x^2}$ C) x^2+1 D) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ E) $\frac{1}{x}$

3. $\arctan 2x = \operatorname{arccot} x$ **olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

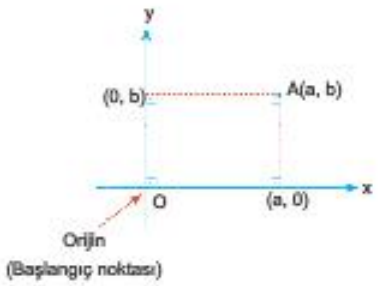
1-E **2-D** **3-B**

ANALİTİK GEOMETRİ

DİK KOORDİNAT SİSTEMİ

BİLGİ

8.1 - Dik Koordinat Sistemi



Analitik düzlem (Dik koordinat sistemi)
R x R veya R^2 şeklinde gösterilir.

1. A noktasının apsisi a
2. A noktasının ordinatı b
3. A noktasının x eksenine uzaklığı: |b|
4. A noktasının y eksenine uzaklığı: |a|
5. Orijn O(0, 0)
6. x ekseni üzerindeki tüm noktaların ordinatı sıfırdır.
7. y ekseni üzerindeki tüm noktaların apsisi sıfırdır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **A(k – 1, 2k + 1) noktasının apsisi 3 olduğuna göre, ordinatı kaçtır?**

Çözüm:
k – 1 = 3
k = 4 bulunur.
ordinatı 2k + 1 olduğundan 2. 4 + 1 = 9 dur.

2. **B(1 – m, 2m + 1) noktasının ordinatı, apsisine eşit olduğuna göre B noktasının koordinatları nedir?**

Çözüm:
1 – m = 2m + 1 ⇒ m = 0 olur.
B(1, 1) bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **A(4 – 2k, k – 1) noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre, A noktasının apsisi kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

2. **P(2k – 1, 4k + 4) noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre, P noktasının ordinatı kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

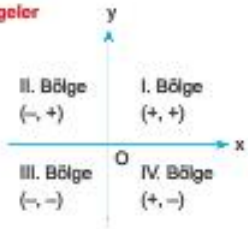
1-D **2-A**

İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

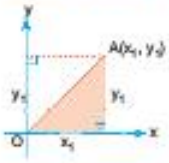
BİLGİ

8.2 - Analitik Düzlem

Bölgeler



Noktanın orijine uzaklığı



A noktasının orijine olan uzaklığı

$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

İki nokta arasındaki uzaklık

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. **A(m + 1, n – 1) noktası I. bölgede olduğuna göre, m in en küçük tam sayı değeri ile n nin en küçük tam sayı değeri toplamı kaçtır?**

Çözüm:

$m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$ m'nin en küçük tamsayı değeri 0 dır.

$n - 1 > 0 \Rightarrow n > 1$ n'nin en küçük tamsayı değeri 2 dir.

Toplamları 2 dir.

2. **A(a, b) noktası II. bölgede olduğuna göre, B(b, a) noktası kaçıncı bölgededir?**

Çözüm:

$a < 0$

$b > 0$ dır.

B(b, a) = (+, –) den IV. bölgede olur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **A(m – 3, m – 7) noktası IV. bölgede olduğuna göre m nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

2. **P(–3, 4 – m) noktası III. bölgede olduğuna göre m nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?**

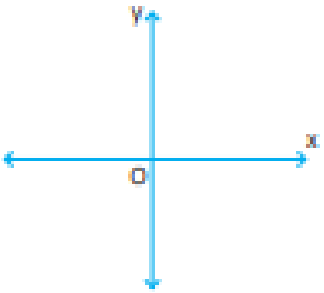
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

1-D 2-B

DOĞRUNUN EĞİMİ

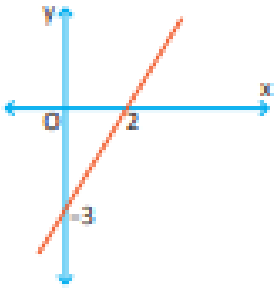
Doğrunun Eğimi

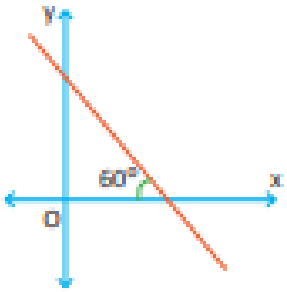
Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun eğim açısı denir.

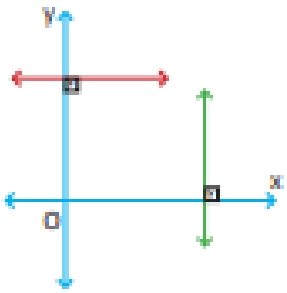


Örnek

Aşağıda verile doğruların eğimlerini bulalım.

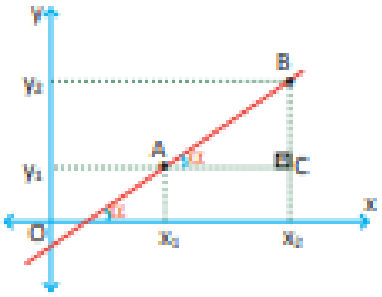






Üzerindeki İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.



Örnek

Analitik düzlemde A(3, 2) ve B(8, 4) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.

Örnek

Analitik düzlemde $A(-\sqrt{3}, 5)$ ve $B(2\sqrt{3}, b)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısı 120° ise b = ?

Denklemi Bilinen Doğruların Eğimi

a, b, c ∈ R ve b ≠ 0 olmak üzere ax + by + c = 0 denklemine doğrunun kapalı denklemi denir.

$m = -\frac{a}{b}$ dir.

y = mx + n denklemine doğrunun açık denklemi denir.

Örnek

5x − 3y + 11 = 0 doğrusunun eğimi nedir?

y = 11x + 7 doğrusunun eğimi nedir?

DOĞRU DENKLEMİ

Eğimi m olan ve üzerindeki bir noktanın koordinatı $A(x_1, y_1)$ olan doğrunun denklemi,

$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$ denklemi ile bulunur.

Eğimi m olan bir doğrunun denklemi

$y = mx + n$ biçiminde ifade edilebilir.

Örnek

A(−3, 1) noktasından geçen ve eğim açısı 135° olan doğrunun denklemini bulalım.

Örnek

Analitik düzlemde denklemi $y = (a - 3)x + 2$ olan doğrunun eğim açısı 45° olduğuna göre a = ?

Örnek

Analitik düzlemde denklemi d: $ax - 2y + 1 = 0$ olan doğrunun A(3, 8) noktasından geçtiği bilindiğine göre a değerini bulalım.

Örnek

$3x - ay + 20 = 0$ doğrusunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı 5 olduğuna göre a değerini bulalım.

Örnek

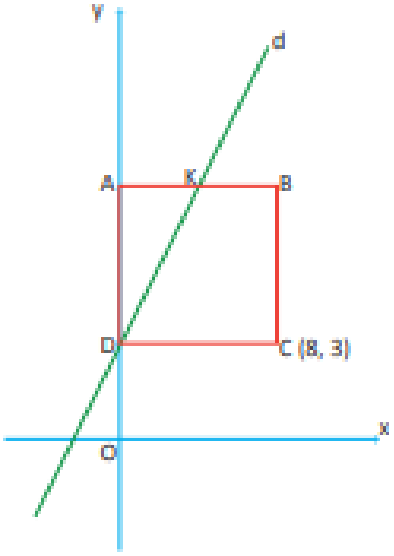
Analitik düzlemde A(3, 7) ve B(2, 5) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Örnek

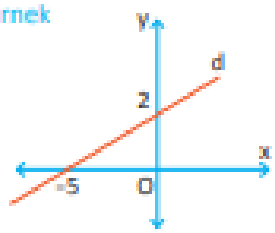
Analitik düzlemde A(−1, 3), B(5, −9) ve C(3, a) noktaları doğrusal olduğuna göre a değerini bulalım.

Örnek

Şekilde ABCD bir kare, |AK| = |KB| olduğuna göre, d doğrusunun denklemi nedir?

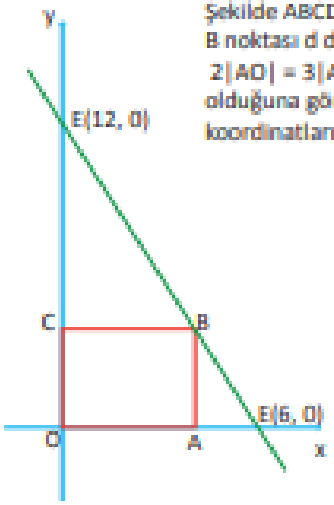


Örnek



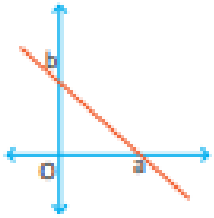
Şekilde verilen d doğrusunun denklemini yazalım.

Örnek



Şekilde ABCD bir dikdörtgen B noktası d doğ. üzerinde 2|AD| = 3|AB| olduğuna göre, B noktasının koordinatlarını bulalım.

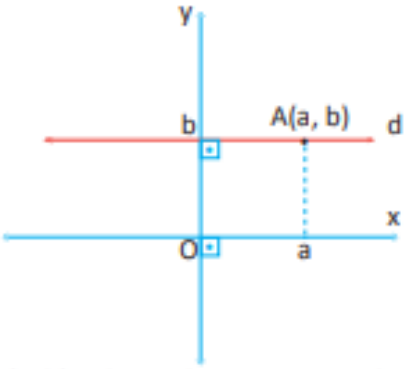
Eksnleri Kestiği Noktalar Bilinen Doğru Denklem



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

EKSENLERE PARALEL VE ORİJİNDEN GEÇEN DOĞRULAR

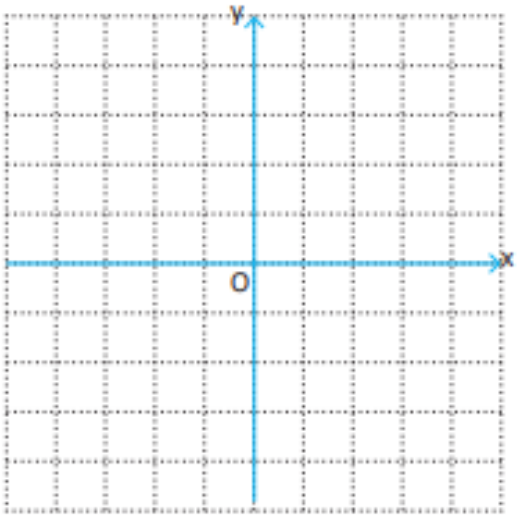
x Eksenine Paralel Doğru Denklemleri



A(a, b) noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemi $y - b = m\cdot(x - a)$ dır.
x eksenine paralel doğruların eğimi sıfır olduğundan, $m = 0$ için,
$y - b = 0$
$y = b$ olur.

Örnek

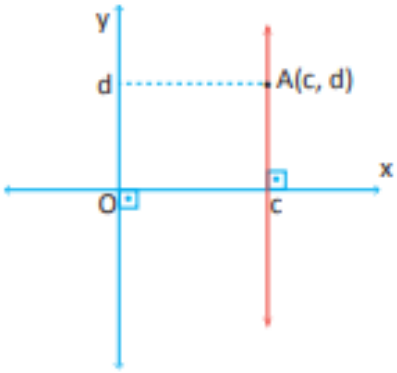
$y = 3$ ve $y = -2$ doğrularını çizelim.



Örnek

A(−4, 1) noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

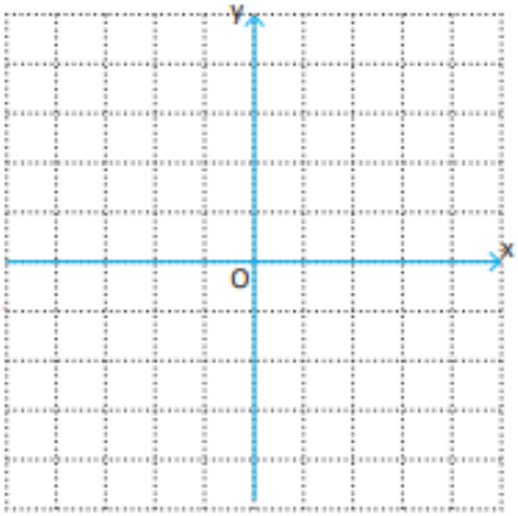
y Eksenine Paralel Doğru Denklemleri



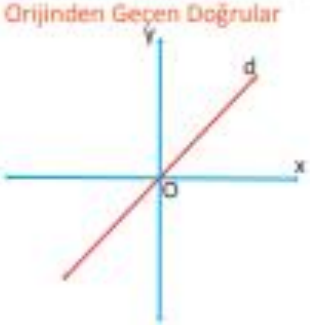
A(c, d) noktasından geçen ve y eksenine paralel olan doğrunun denklemi $x = c$ dir.

Örnek

$x = 3$ ve $x = -4$ doğrularını çizelim.



Orijinden Geçen Doğrular



O(0, 0) noktasından geçen doğrunun denklemi
$y - 0 = m\cdot(x - 0)$
$y = m\cdot x$ olur.

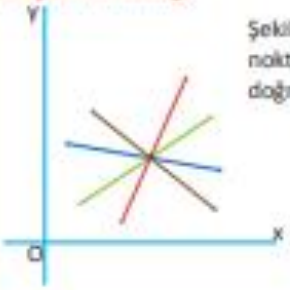
Örnek
x ekseni ile pozitif yönde 60^0 lik açı yapan doğrunun denklemini bulalım.

Örnek
A(a, 5a) , B(b, 5b) noktalarından geçen doğru denklemini bulalım.

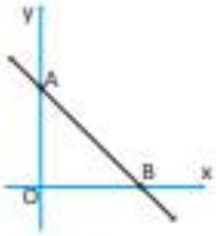
Örnek
$(k - 3)x + 5y + 1 = 0$ doğrusu x eksenine paralel olduğuna göre k değerini bulalım.

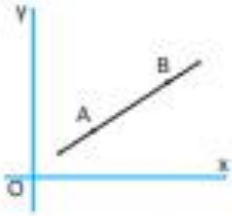
Örnek
$5x - 3y - p + 4 = 0$ doğrusu orijinden geçtiğine göre p değerini bulalım.

Doğrunun Grafiği



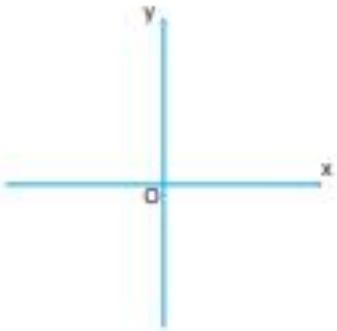
Şekilde görüldüğü gibi bir noktadan sonsuz sayıda doğru geçer.





Analitik düzlemde herhangi iki noktadan yalnızca bir doğru geçer. Bu durumda bir doğru grafiğini çizebilmek için üzerindeki iki noktasını bilmek yeterlidir.

Örnek
$3x + 5y + 15 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

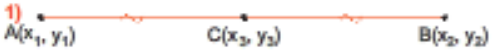


ORTA NOKTA

BİLGİ

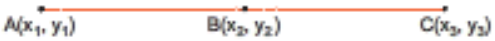
9.1 - Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları, Orta Nokta

1)



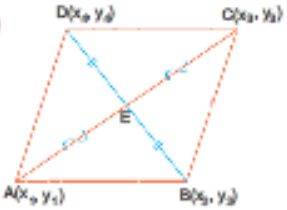
$$(x_3, y_3) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

3) Bir doğru parçasının belli bir oranda bölünmesi



$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

2)



ABCD paralelkenarında karşılıklı köşe koordinatları toplamı birbirine eşittir.

$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ $\quad$ $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. A(2, 3) ve B(4, 7) noktalarının orta noktasının koordinatları nedir?

Çözüm:

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (3, 5)$ olur.

2. A(–1, y) ve B(x, 3) noktalarının orta noktasının koordinatı (5, 2) ise, x + y toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\frac{-1 + x}{2} = 5$ ve $\frac{y + 3}{2} = 2$

$x = 11$ ve $y = 1$ olur.

$x + y = 12$ bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. A(–2, 8) ve B(5, –1) noktalarının orta noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. A(x – 1, y + 1) ve B(x + 1, y – 3) noktalarının orta noktası orijin olduğuna göre, x – y farkı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

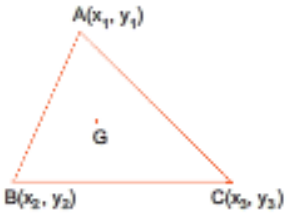
1-C 2-A

ÜÇGENİN AĞIRLIK MERKEZİ VE ALANI

BİLGİ

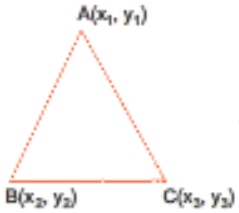
10.1 - Üçgenin Ağırlık Merkezi ve Alanı

1) Üçgenin Ağırlık Merkezi



$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

2) Üçgenin Alanı



$$\begin{array}{c|c|c} x_2 \cdot y_1 & x_1 \quad y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_2 & x_2 \quad y_2 & x_2 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_3 & x_3 \quad y_3 & x_3 \cdot y_1 \\ \hline K & x_1 \quad y_1 & M \end{array}$$

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\,|M - K|$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. ABC üçgeninin A(1, 2), B(3, 4) ve C(5, –3) köşe koordinatları olduğuna göre üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları nedir?

Çözüm:

$G\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{2+4-3}{3}\right) = (3, 1)$ bulunur.

2. ABC üçgeninin köşe koordinatları A(0, –2), B(3,1) ve C(x, y) olan üçgenin ağırlık merkezi G(1, 2) ise, x + y toplamı kaçtır?

Çözüm:

$G(1, 2) = G\left(\frac{0+3+x}{3}, \frac{-2+1+y}{3}\right)$

$1 = \frac{3+x}{3} \Rightarrow x = 0$ ve $2 = \frac{-1+y}{3} \Rightarrow y = 7$ olur.

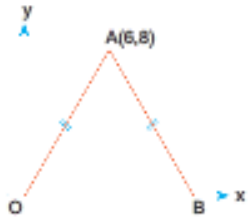
$x + y = 0 + 7 = 7$ bulunur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Köşe koordinatları A(–1, 0), B(3, 0) ve C(4, 4) olan ABC üçgeninin alanı kaç br² dir?

A)12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

2.



Şekildeki OAB ikizkenar üçgeninin alanı kaç br² dir?

A) 20 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

1-C 2-E

İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI

BİLGİ

14.1 - İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

1) İki doğru kesişir ise;
Ortak çözüm yapılır. Yok etme metodu veya yerine koyma metodu kullanılarak iki doğrunun kesiştiği ortak noktanın koordinatları bulunur.

2) İki doğru birbirine paralel ise;
eğimleri birbirine eşittir.

3) İki doğru birbirine dik ise;
eğimleri çarpımı –1 dir.

4) $y = mx + n$
m = eğim

5) $ax + by + c = 0$
eğim $= -\frac{a}{b}$ dir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. $x + y = 4$ ve $x - y = 6$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları nedir?

Çözüm:

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \\ +\ x - y = 6 \\ \hline 2x = 10, \end{array} \quad x = 5 \text{ olur.}$$

$x = 5$ için $5 + y = 4$, $y = -1$ dir.

$(5, -1)$ bulunur.

2. $2x + by + 3 = 0$ doğrusunun eğimi $y = 3x + 5$ doğrusunun eğimine eşit ise, b kaçtır?

Çözüm:

$-\frac{2}{b} = 3 \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$ olur.

3. $y = 2x + 6$ ve $y = -2x + 6$ doğrularının eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanını bulunuz?

Çözüm:

Doğruları dik koordinat sisteminde çizdiğimizde

Alan $= \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ br² olur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. $2x + y - 12 = 0$ ve $y = 2x$ doğrularının ortak noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) (1, 2) B) (1, 3) C) (2, 4) D) (3, 6) E) (6, 4)

2. $3x + y - 1 = 0$ ile $ax + y = 0$ doğrusu paralel olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $y = -2x + 6$ doğrusu, $x + by - 1 = 0$ doğrusuna dik olduğuna göre, b kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

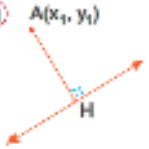
1-D 2-C 3-A

BİR NOKTANIN DOĞRUYA OLAN UZAKLIĞI

BİLGİ

15.1 - Bir Noktanın Doğruya Olan Uzaklığı

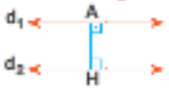
① $A(x_1, y_1)$



$ax + by + c = 0$

$$|AH| = \frac{|a.x_1 + b.y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

② **Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık**

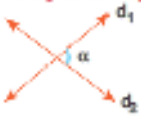


$ax + by + c_1 = 0$

$ax + by + c_2 = 0$

$$|AH| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

③ **Kesişen İki Doğru Arasındaki Açının Tanjantı**



$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2}$$

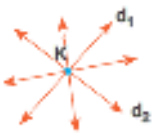
④ **Kesişen İki Doğrunun Açıortay Doğrusu**

$d_1: a_1x + b_1y + c = 0$

$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

⑤ **Doğru Demeti**



K noktasından geçen doğruların oluşturduğu kümeye doğru demeti denir. $k \in R$ olmak üzere, doğru demeti denklemi

$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. A(1, 2) noktasının

$$6x - 8y - 30 = 0$$

doğrusuna olan uzaklığı kaç br dir?

Çözüm:

$$\frac{|6 . 1 - 8 . 2 - 30|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{40}{10} = 4 \text{ birimdir.}$$

2. Analitik düzlemde,
$5x + 12y - 14 = 0$ doğrusu ile $5x + 12y + 12 = 0$ doğrusu arasındaki uzaklık kaç br dir?

Çözüm:

$$\frac{|12 - (-14)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2 \text{ birimdir.}$$

ÖĞRENCİ SORULARI

1. A(7, 2) noktasının $x + 2y + k = 0$ doğrusuna uzaklığı $2\sqrt{5}$ br olduğuna göre, k nın alabileceği değerleri toplamı kaçtır?

A) –24 B) –22 C) –21 D) –20 E) –18

2. Analitik düzlemde,
$d_1: 3x - 4y + 17 = 0$
$d_2: 6x - 8y + 4 = 0$
doğruları arasındaki uzaklık kaç br dir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

1-B 2-D

FONKSİYON İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

BİLGİ

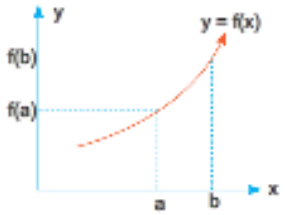
16.1 - Fonksiyon ile İlgili Uygulamalar

Fonksiyonun ortalama değişim hızı;
Bir fonksiyonun [a, b] aralığındaki

ortalama değişim hızı

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

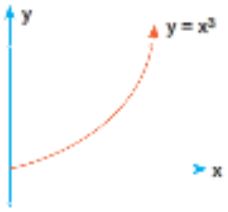
formülü yardımıyla bulunur.



$$O.D.H = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$

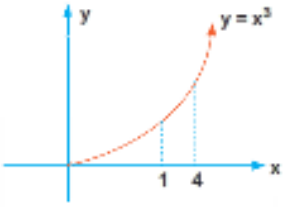
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1.



Yukarıdaki $y = x^3$ eğrisinin [1, 4] aralığındaki ortama değişim hızını bulunuz

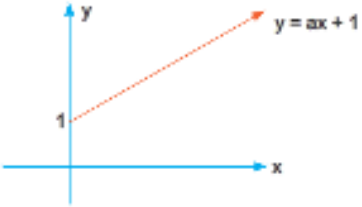
Çözüm:



$x = 1$ için
$y = (1)^3 = 1$ bulunur.
$x = 4$ için
$y = (4)^3 = 64$ bulunur.

$$O.D.H = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{64 - 1}{3} = \frac{63}{3} = 21 \text{ bulunur.}$$

2.



Yukarıdaki $y = ax + 1$ doğrusunun [2, 5] aralığındaki ortalama değişim hızı 6 ise a değeri kaçtır?

Çözüm:

$$O.D.H = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 6 \text{ olacağından}$$

$f(5) = 5a + 1$

$f(2) = 2a + 1$

$$O.D.H = \frac{f(5a + 1) - f(2a + 1)}{3} = 6$$

$$\frac{3a}{3} = 6$$

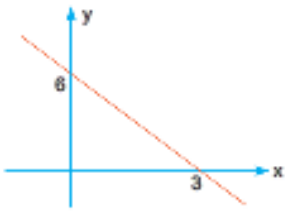
$a = 6$ olur.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. **$f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunu [3, 6] arasındaki ortalama değişim hızı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.



Yukarıdaki grafiğin [1, 2] arasındaki değişim hızı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

1-B **2-A**

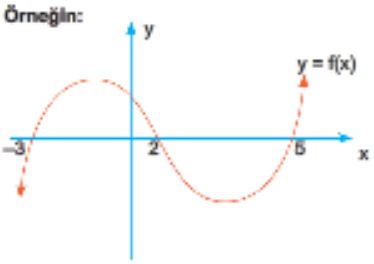
FONKSİYONLARDA POZİİTİFLİK NEGATİFLİK

BİLGİ

16.2 - Fonksiyonda Pozitiflik Negatiflik

Grafiği verilen fonksiyonun x ekseni üzerinde kalan kısmı pozitif x ekseni altında kalan kısmı negatif olarak tanımlanır.

Örneğin:



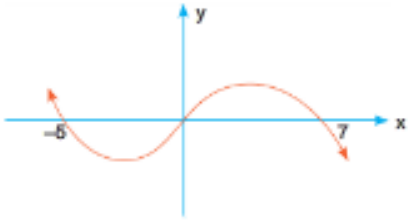
Pozitif bölüm: (–3, 2) ve (5, ∞) aralığı

Negatif bölüm: (–∞, –3) ve (2, 5) aralığıdır.

x = –3, x = 2, x = 5 değerlerinde fonksiyon sıfır değerini alır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

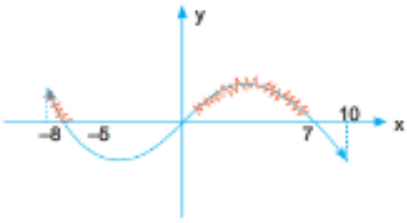
1.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, [–8, 10] aralığında fonksiyonu pozitif yapan x tam sayıları kaç tanedir?

Çözüm:



Yukarıda grafikte pozitif yapan x tam sayıları,

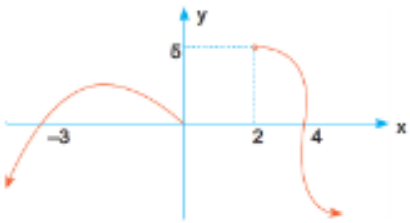
x = –8, x = –7, x = –6 ve

x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6 dır.

Yani 9 değerde fonksiyon pozitiftir.

ÖĞRENCİ SORULARI

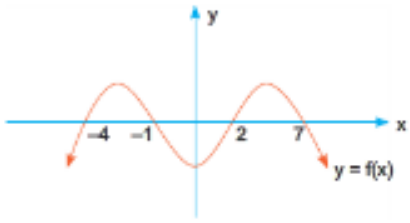
1.



Yukarıdaki grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun pozitif olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) [–3, 4]
B) [–3, 0] ∪ [0, 4]
C) (–3, 0) ∪ [2, 4]
D) (–3, 0) ∪ (2, 4)
E) R – [–2, 4]

2.



Yukarıdaki verilen y = f(x) fonksiyonunu negatif yapan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) –21 B) –17 C) –15 D) –12 E) –8

1-D **2-B**

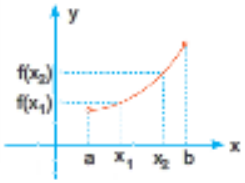
ARTAN AZALANLIK

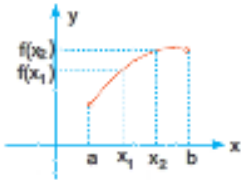
BİLGİ

16.3 - Artan - Azalanlık

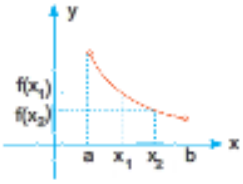
f: (a, b) → R olmak üzere,

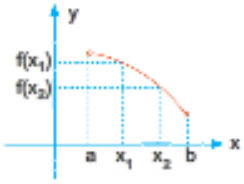
Her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artandır.





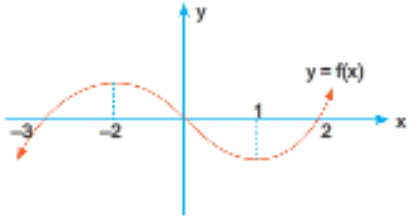
Her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.





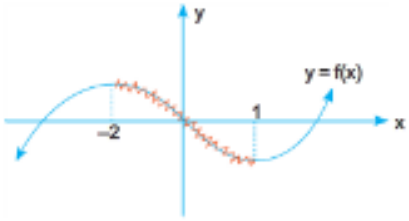
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1.



Yukarıda grafiği verilen eğrinin azalan olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm:



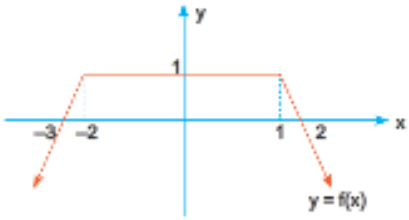
Grafiğe bakılarak (–2, 1) aralığında azalan olduğunu söyleyebiliriz.

ÖĞRENCİ SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi daima azalan fonksiyondur?

A) $y = x^3 + 2x$ B) $y = x^2 + 3x$ C) $y = 2x + 4$
D) $y = 6 - 3x$ E) 8

2.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, grafiğin artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) (–5, –3) B) (–2, 1) C)(–3, –1)
D) (0, 2) E) (1, 3)

1-D **2-A**