ÜSLÜ SAYILAR

[!] Özellikler:

$a,b \in R$ ve $m,n \in Z^+$ için,

- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $a^n . b^n = (a.b)^n$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \qquad (b \neq 0)$

[!] Üslü Sayıların Eşitliği:

- $a \notin \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere,

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

- $n \neq 0$ olmak üzere,

$$a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} a = b \ , \ n \text{ tek ise} \\ a = \mp b, \ n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğu verilir.

$2^x - 3.2^{x-1} + 5.2^{x+1} = 76$ denklemini çözünüz.

$\left.\begin{matrix} 9^x = 32 \\ 8^y = 81 \end{matrix}\right\}$ ise $x.y$ kaçtır?

ÜSLÜ İFADELER

a ∈R ve n ∈ N^+ olmak üzere,

$$a^n = a.a.a. \ldots .a$$

şeklindeki n tane a nın çarpımına, **üslü ifadeler** denir ve <u>a nın n inci kuvveti</u> şeklinde okunur.

<u>Örnekler:</u>

$a^1 = a$	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$(2/5)^1 = 2/5$
$a^2 = a.a$	$1^2 = 1.1 = 1$	$2^2 = 2.2 = 4$	$(2/5)^2 = 4/25$
$a^3 = a.a.a$	$1^3 = 1.1.1 = 1$	$2^3 = 2.2.2 = 8$	$(2/5)^3 = 8/125$

Üslü Sayıların Özellikleri:

1. *Sıfırdan farklı bir sayının, sıfırıncı kuvveti 1 dir. Yani, a ¹ 0 iken, $a^0 = 1$ dir.*

<u>Örnekler:</u>

$1^0 = 1$
$2^0 = 1$
$(1/2)^0 = 1$
$1000^0 = 1$
$(-5/7)^0 = 1$
$(-5)^0 = 1$

2. *Herhangi bir sayının 1 inci kuvveti, o sayının kendisine eşittir. Yani,*

$$a^1 = a \text{ dır.}$$

Örnekler:

$0^1 = 1$
$1^1 = 1$
$2^1 = 2$
$(1/2)^1 = 1/2$
$(-5/2)^1 = -5/2$
$(-3)^1 = -3$

3. *Tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımı, ortak taban alınıp üslerin toplamı alınarak bulunur. Yani,*

$$a^m . a^n = a^{m+n} \text{ dir.}$$

Örnekler:

$2^3 . 2^2 = 2^5 = 32$
$(-5)^2 . (-5) = (-5)^3 = (-)^3 . 5^3 = -5^3 = -5.5.5 = -125$
$(1/2)^4 . (1/2) = (1/2)^5 = (1/2).(1/2).(1/2).(1/2).(1/2) = 1/32$

4. *Tabanları aynı olan iki üslü sayının bölümü, ortak taban alınıp payın üssünden paydanın üssü çıkarılarak bulunur. Yani,*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Örnekler:

$\frac{3^5}{3^2} = \quad 3^{5-2} = 3^3 = 3.3.3 = 27$

$\frac{10^5}{10^4} = \quad 10^{5-4} = 10^1 = 10$

$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{56}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{54}} = \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{56-54} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

5. *Üslü bir sayının kuvvetini almak için, taban alınıp üs ile kuvvetin çarpımı üs olarak alınmalıdır. Yani,*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ dir.}$$

Örnekler:

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

6. *Tabanları farklı üsleri aynı olan iki üslü sayının çarpımı, tabanlarının çarpımı yapılıp üs olarak ortak üs alınmalıdır. Yani,*

$$a^m \,.\, b^m = (a \,.\, b)^m \text{ dir.}$$

Örnekler:

$2^3.5^3 = (2.5)^3 = 10^3 = 10.10.10 = 1000$

$3^{100}.5^{100} = (3.15)^{100} = 15^{100}$

7. *Tabanları farklı üsleri aynı olan iki üslü sayının bölümü, önce tabanları bölünüp sonra da üs olarak ortak üs alınarak yapılmalıdır. Yani,*

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Örnekler:

$$\frac{10^{200}}{5^{200}} = \left(\frac{10}{5}\right)^{200} = 2^{200}$$

$$\frac{15^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2 = 25$$

8. $a^{-m} = 1/a^m$ *ve* $1/a^{-m} = a^m$ *dir.*

Örnekler:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

9. $(a/b)^{-m} = (b/a)^m = b^m/a^m$ *dir.*

Örnek:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

10. *Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılar, kendi aralarında toplanıp çıkarılabilir. Yani,*

$$x.a^n \pm y.a^n = (x \pm y).a^n \quad \text{dir.}$$

Örnekler:

$2.5^7 + 3.5^7 = (2+3).5^7 = 5.5^7 = 5^1.5^7 = 5^{1+7} = 5^8$

$2.3^4 + 5.3^4 - 3.3^4 = (2+5-3).3^4 = 4.3^4 = 4.81 = 324$

11. *$a = b$ ise, $a^n = b^n$ dir.*

<u>Örnek:</u>

$x = 5$ ise, $x^2 = 5^2$ dir. Dolayısıyla, $x^2 = 25$ dir.

12. *Bir a sayısı, 0, 1, -1 den farklı olmak üzere,*

$a^m = a^n$ ise, $m=n$ dir.

<u>Örnekler:</u>

<u>Örnek 1:</u> $25^x = 5$ ise, x kaçtır?

$(5^2)^x = 5$ Þ $5^{2x} = 5^1$ Þ $2x = 1$ Þ $x = 1/2$ olur.

<u>Örnek 2:</u> $32^x = 8$ ise, x kaçtır?

$(2^5)^x = 2^3$ Þ $2^{5x} = 2^3$ Þ $5x = 3$ Þ $x = 3/5$ olur.

<u>Örnek 3:</u> $9^x/3 = 27$ ise, x kaçtır?

$9^x = 3.27$ Þ $9^x = 3^4$ Þ $(3^2)^x = 3^4$ Þ $3^{2x} = 3^4$ Þ $2x = 4$ Þ $x = 2$ bulunur.

13. *$a^n = b^n$ iken,*

i. n çift sayı ise, $a=b$ veya $a= -b$ dir.

ii. n tek sayı ise, $a=b$ dir.

<u>Örnek:</u> $(x+5)^2 = 4$ ise, x kaçtır?

$(x+5)^2 = 2^2$ olduğundan, $x+5 = 2$ veya $x+5 = -2$ olur. Buradan, $x= -3$ veya $x= -7$ bulunur.

<u>Örnek:</u> $(x-8)^3 = 125$ ise, x kaçtır?

$(x-8)^3 = 5^3$ olduğundan, $x-8 = 5$ olur ve buradan $x= 13$ bulunur.

14. *1 sayısının herhangi bir kuvveti, 1 dir. Yani, $1^n = 1$ dir.*

<u>Örnekler:</u>

$1^0=1,\ 1^2=1,\ 1^{-3},\ 1^{1/2}=1$

ÖRNEKLER

Örnek 1: $9.(-3)^2$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $9.(-3)^2 = 9.(1/(-3)^2) = 9.(1/9) = 1$

Örnek 2: $(-7)^{23}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $(-7)^{23} = (-)^{23}.7^{23} = - 7^{23}$

Örnek 3: $(-2)^4$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $(-2)^4 = (-)^4.2^4 = 2^4 = 16$

Örnek 4:

$$\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{8}{14}\right)^{-1} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{8}{14}\right)^{-1} = \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{14}{8}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Örnek 5: $(-4)^2 + (-4)^2 : 8 = ?$

Çözüm: $(-4)^2 + (-4)^2 : 8 = 16 + 16 : 8 = 16 + 2 = 18$

Örnek 6: $(-3)^{15} + 2.(-3)^{15} = ?$

Çözüm: $(-3)^{15} + 2.(-3)^{15} = (1+2).(-3)^{15} = 3.(-3)^{15} = 3.(-)^{15}.3^{15} = - 3.3^{15} = 3^{16}$

Örnek 7: $5^3 - 2^5 + 3^4 = ?$

Çözüm: $5^3 - 2^5 + 3^4 = 125 - 32 + 81 = 206 - 32 = 174$

Örnek 8: $(-3)^3.3^2.3^{-1} = ?$

Çözüm: $(-3)^3.3^2.3^{-1} = -3^3.3^2.3^{-1} = - 3^{3+2-1} = - 3^4 = - 81$

Örnek 9: $(16)^{1/2} = ?$

Çözüm: $(16)^{1/2} = (42)^{1/2} = 4^1 = 4$

Örnek 10: $(32)^{-1/5} = ?$

Çözüm: $(32)^{-1/5} = (2^5)^{-1/5} = 2^{-1} = 1/2$

Örnek 11: $2^{3x-7} = 32$ ise, $x = ?$

Çözüm: $2^{3x-7} = 32$ Þ $2^{3x-7} = 2^5$ Þ $3x-7 = 5 \Rightarrow 3x = 5+7$ Þ $3x=12$ Þ $x=4$

Örnek 12: $3^{2x}.3^4 = 27$ ise, $x = ?$

Çözüm: $3^{2x}.3^4 = 27 \Rightarrow 3^{2x+4}=3^3$ Þ $2x+4=3$ Þ $2x=3-4$ Þ $2x= -1$ Þ $x= -1/2$

Örnek 13: $2^x.2^6 = 8$ ise, x kaçtır?

Çözüm: $2^x.2^6 = 8 \Rightarrow 2^{x+6}=2^3 \Rightarrow x+6=3 \Rightarrow x=3-6 \Rightarrow x= -3$

Örnek 14:

$$\frac{\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}}{(27)^{\frac{2}{3}}}=?$$

Çözüm:

$$\frac{(81)^{\frac{1}{2}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}}=\quad\frac{\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}}=\quad\frac{9-3}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Örnek 15:

$$\frac{2^{2x}+2^{x}+2^{3x}}{2^{5x}+2^{4x}+2^{3x}}=?$$

Çözüm:

$$\frac{2^x2^x+2^x+2^x2^x2^x}{2^{3x}2^{2x}+2^{3x}2^x+2^{3x}}=\quad\frac{2^x\left(2^x+1+2^{2x}\right)}{2^{3x}\left(2^{2x}+2^x+1\right)}=\quad\frac{2^x}{2^{3x}}=2^{x-3x}=2^{-2x}=\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{4^x}$$

Örnek 16:

$$\frac{a^{n+3}+a^{n+2}+a^{n+1}}{a^3+a^2+a}=a^3$$

ise, n kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a^n\left(a^3+a^2+a\right)}{\left(a^3+a^2+a\right)}=a^3$$

dır. Buradan, $a^n = a^3$ tür ve böylece n=3 bulunur.

Örnek 17:

$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 13.3^{2n}$ ise, n kaçtır?

Çözüm:

$3^n(1+3+3^2) = 13.3^{2n}$

$3^n .13 = 13.3^{2n}$

Buradan, $3^n = 3^{2n}$ bulunur. Her iki taraf 3^n ile bölünürse,

$$3^{2n}/3^n = 1 \text{ olur ve } 3^{2n-n} = 1 \quad 3^n = 1 \quad n=0$$

olur.

Örnek 18:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2^{3k} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2m-3} = 5$$

ise, (k+m) toplamı kaçtır?

Çözüm:

$2^{-(k+1)} = 2^{3k}$
$-k-1 = 3k$
$-1 = 4k$
$k = -1/4$

$5^{-2m+3} = 5^1$
$-2m+3 = 1$
$2m = 2$
$m = 1$

Buradan, $k+m = -1/4+1 = 3/4$ bulunur.

Örnek 19:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{6m} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{-4m-8}$$

ise, m kaçtır?

Çözüm:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{6m} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{4m+8}$$

$6m = 4m+8$
$2m=8$
$m=4$

Örnek 20:

$$3^{20} - 6.3^{18} = ?$$

Çözüm:

$$3^{18}.3^2 - 6.3^{18} = 3^{18}.(3^2-6) = 3^{18}.3 = 3^{19}$$

Örnek 21:

$3^x = 2a$ ve $2^{x+3} = b$ ise, 6^x in a ve b cinsinden değeri kaçtır?

Çözüm:

$$2^{x+3} = b \Rightarrow 2^x.2^3 = b \text{ Þ } 2^x = b/8 \text{ dir.}$$

$$6^x = (2.3)^x = 2^x.3^x = (b/8).2a = (a.b)/4$$

bulunur.

Örnek 22:

m, n, p birer tamsayı olmak üzere, $2^m + 2^n + 2^p = 28$ ve $m > n > p$ ise,

$m + 2n - 3p = ?$

Çözüm:

$2^m + 2^n + 2^p = 28$ ve $m > n > p$ koşulunu sağlayan değerler şunlardır:

$$m = 4,\ n = 3,\ p = 2.$$

Böylece,

$$m + 2n - 3p = 4 + 2.3 - 3.2 = 4 + 6 - 6 = 4 \text{ olur.}$$

Örnek 23:

$$16^m = 5 \text{ ise, } 2^{2m} \text{ kaç olur?}$$

Çözüm:

$16^m = 5$ Þ $(2^4)^m = 5$ Þ $2^{4m} = 5$ Þ $(2^{4m})^{1/2} = (5)^{1/2}$ Þ $2^{2m} = 5^{1/2}$ bulunur.

Örnek 24:

$$\frac{0,0009}{(0,01)^2} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{0,0009}{(0,01)^2} = \frac{\frac{9}{10000}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10000}}{\frac{1}{10000}} = 9$$

Örnek 25:

$$(2,5)^{2x} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = 1$$

ise, x kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{0}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{0}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{0}$$

$$x+1 = 0$$
$$x = -1$$

Örnek 26:

$$8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,5} + 16^{0,75} = ?$$

Çözüm:

$$\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(9^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^2 - 9^1 + 2^3$$

$$= 4 - 9 + 8 = 12 - 9 = 3$$

Örnek 27:

$2^x = 15$, $3^y = 90$, $7^z = 30$ ise, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

a) $x < y < z$ b) $z < x < y$ c) $y < x < z$ d) $x < z < y$ e) $z < y < x$

Çözüm:

$2^x = 15$ olduğundan, x değeri 3 ile 4 arasındadır. Yani, $3 < x < 4$ dür.

$3^y = 90$ olduğundan, y değeri 4 ile 5 arasındadır. Yani, $4 < y < 5$ dir.

$7^z = 30$ olduğundan, z değeri 1 ile 2 arasındadır. Yani, $1 < z < 2$ dir.

Dolayısıyla,

$$z < x < y$$

olmalıdır. Doğru seçenek, b dir.

Etkinlik:

$\left.\begin{array}{l} 3^{-x} = a \\ 2^{x} = b \end{array}\right\}$ ise 144^{2x} in a ve b türünden değeri buldurulur.

$\dfrac{-a^2\left(-a\right)^2\left(-a\right)^3 a^{10}}{-a^3\left(-a^2\right)^3\left(-a\right)^4}$ işleminin sonucu buldurulur.

$7.5^x + 4.5^{x+1} - 5^{x+2} = 50$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

$n \in N$ olmak üzere, $x^{2n+4} = 6^{2n+4}$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

$(\frac{7}{6})^{5-4x} \le (\frac{6}{7})^{3x+2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi buldurulur.

$(3x+5)^{6x-8} = 1$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

$\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x^2-9x+20} = 1$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

$2^x - 3.2^{x-1} + 5.2^{x+1} = 76$ denklemini çözünüz.

$\left.\begin{array}{l} 9^x = 32 \\ 8^y = 81 \end{array}\right\}$ ise $x.y$ kaçtır?

$(0.125)^{1-x} = 16^{2x+3}$ denklemini çözünüz.

KÖKLÜ SAYILAR

[!] $x \in R,\ a,b \in R^+$ ve $n \in Z^+$ için,

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$
- $\sqrt{a^2.b} = a\sqrt{b}$

eşitliklerinin kullanıldığı problemler verilir.

[!] $\frac{c}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$ vebenzer biçimdeki köklü sayıların paydalarının rasyonel yapılması verilir.

$\sqrt{8} - \sqrt{45} - \sqrt{50} + 2\sqrt{48} + \sqrt{72} - \sqrt{75}$
sayısını en sade biçimde yazınız.

$\left(\sqrt{3}-2\right)^{99}\left(\sqrt{3}+2\right)^{100}$ işleminin sonucu kaçtır?

🗐 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ işleminin sonucu kaçtır?

🗐 $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$ işleminin sonucu kaçtır?

[!] $x \in R,\ \ a,b \in R^{+}$ ve $m,n,r \in Z^{+}$ için,

- $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & n \text{ çift ise} \\ x, & n \text{ tek ise} \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ve $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n.r]{a^{m.r}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^n.b} = a\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

eşitliklerinin kullanıldığı problemler verilir.

KÖKLÜ SAYILAR

A. TANIM

n, 1 den büyük bir sayma sayısı olmak üzere,

$x^n = a$ denklemini sağlayan x sayısına a nın n inci dereceden **kökü** denir.

$x^n = a$ ise, $x = \sqrt[n]{a}$ dır.

B. KÖKLÜ İFADELERİN ÖZELLİKLERİ

1. n tek ise, $\sqrt[n]{a}$ daima reeldir.
2. n çift ve a < 0 ise, $\sqrt[n]{a}$ reel sayı belirtmez.
3. a ≥ 0 ise, daima reeldir.
4. a ≥ 0 ise, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ dır.
5. n tek ise, $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.
6. n çift ise, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ dır.
7. $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.

8. n çift ve b ile c aynı işaretli olmak üzere,

$$\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}} \quad \text{dir.}$$

9. ne tek ise $\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}}$ dir.

10. a pozitif reel (gercel) sayı olmak üzere ;

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{dir.}$$

11. k pozitif tam sayı ve a pozitif gerçel sayı olmak üzere;

i. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k.n]{a^{m.k}}$

ii. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}} \;,\; \left(\frac{n}{k} \in Z^+\right)$

12. ($a \neq 0$ ve $b \neq 0$) ise, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

C. KÖKLÜ İFADELERDE YAPILAN

İŞLEMLER

1. Toplama - Çıkarma

Kök dereceleri birbirine eşit ve kök içindeki sayılar da birbirine eşit olan ifadelerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

Bulunan sonuç köklü ifadenin katsayısı olur.

$$b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} - d \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c - d) \cdot \sqrt[n]{a}$$

2. Çarpma

n ve m, 1 den büyük tek sayı ya da a ve b negatif <u>olmamak</u> üzere,

i) $c \cdot \sqrt[n]{a} \cdot d \cdot \sqrt[n]{b} = c \cdot d \cdot \sqrt[n]{a \cdot b}$ dir.

ii) $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \sqrt[m.n]{a^{n-m}}$ dir.

iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[n.m]{a^m}}{\sqrt[m.n]{b^n}} = \sqrt[m.n]{\frac{a^m}{b^n}}$ dir.

4. Paydayı Kökten Kurtarma

Uygun koşullarda,

i)

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b \,.\, \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$= \frac{b \,.\, \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{1+n-1}}}$$

$$= \frac{b}{a} \,.\, \sqrt[n]{a^{n-1}} \quad \text{dir.}$$

ii)

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1.\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad \text{dir.}$$

iii)

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1.\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad \text{dir.}$$

iv) $$\frac{1}{a \,.\, \sqrt{b} - c \,.\, \sqrt{d}} = \frac{a \,.\, \sqrt{b} + c \,.\, \sqrt{d}}{a^2 \,.\, b - c^2 \,.\, d}$$

v) $$\frac{1}{a \,.\, \sqrt{b} + c \,.\, \sqrt{d}} = \frac{a \,.\, \sqrt{b} - c \,.\, \sqrt{d}}{a^2 \,.\, b - c^2 \,.\, d}$$

vi) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{1.(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a.b}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a.b}+\sqrt[3]{b^2})}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a.b}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

vii) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a.b}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

D. İÇ İÇE KÖKLER

i) $$\sqrt[m]{a.\sqrt[n]{b.\sqrt[k]{c}}}=\sqrt[m.n.k]{a^{n.k}.b^{k}.c}$$

ii) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}}=\sqrt[m.n.k]{a}$$

iii) $$\underbrace{\sqrt{a.\sqrt{a.\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{n \text{ tane } a}=a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$$

iv) $$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

v) $0<y<x$ olmak üzere,

$$\sqrt{(x+y)\pm 2.\sqrt{x.y}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y} \text{ dir.}$$

E. SOZSUZ KÖKLER

i) $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \ldots}}} = \sqrt[n-1]{a}$

ii) $\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \ldots}}} = \sqrt[n+1]{a}$

iii) $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{a \ldots}}}} = \sqrt[m.n-1]{a^{m+1}}$

iv) $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b \ldots}}}} = \sqrt[m.n-1]{a^{m} \cdot b}$

v) $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}} = \dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$

vi) $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \ldots}}} = \dfrac{-1 + \sqrt{4a+1}}{2}$

Yukarıdaki son iki özellikte a. ardışık iki pozitif tam sayının çarpımı ise **v**. 'nin cevabı bu sayıların büyüğü **vi**'nin cevabı bu sayıların küçüğüdür

F. KÖKLÜ İFADELERDE SIRALAMA

Kök dereceleri eşit olan (ya da eşitlenen) pozitif sayılarda ,kök içindeki sayıların büyüğüne göre sıralama yapılır.

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ ise $a < b < c$ dir.

Etkinlik:

- $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $\sqrt{28}+12\sqrt{7}-3\sqrt{700}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}$ işleminin sonucu buldurulur. Buradan hareketle paydayı rasyonel yapmanın gerekliliği vurgulanır.

- Aşağıdaki çalışma kâğıdının doldurulması istenir.

Köklü Biçim	Üslü biçim	Değeri
$\sqrt{4}$	$4^{1/2}$	2
	$(144)^{1/2}$	
$\sqrt{196}$		
$\sqrt[3]{-343}$	$(-343)^{1/3}$	-7
$\sqrt[3]{216}$		
	$(64)^{2/3}$	
$\sqrt[4]{(36)^2}$	$(36)^{2/4}$	6
	$(16)^{5/4}$	
$\sqrt[4]{(1296)^3}$		

- $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt[5]{4\sqrt{2}}}}{\sqrt[5]{16}}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $\sqrt[5]{\dfrac{20^{10}-10^{10}}{10^{10}-5^{10}}}$ işleminin sonucu buldurulur.

- $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ ve $\sqrt[6]{11}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralamaları istenir.

- $2^{-1/2}$, $3^{-1/3}$ ve $6^{-1/4}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralamaları istenir.

- $\sqrt{x+2}=3$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}-3-\sqrt{6}+\sqrt{15}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=?$

2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}=?$

3) $\sqrt{16x^2+16}+\sqrt{9x^2+9}-3\sqrt{4+4x^2}=5\text{ , }x=?$

4) $\sqrt{\sqrt{9^{2x+3}}+2.3^{2x+3}}=81\text{ , }x=?$

A. ORAN

a ve b reel sayılarının en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,**/** ye a nın b ye oranı denir.

- Kesrin payı sıfır olabilir fakat paydası sıfır olamaz.
- Oranın payı ya da paydası sıfır olabilir.
- Oranlanan çoklukların birimleri aynı tür ya da aynı olmalıdır.
- Oranın sonucu birimsizdir.

B. ORANTI

En az iki oranın eşitliğine orantı denir. Yani $\frac{a}{b}$ oranı $\frac{c}{d}$ ile nin eşitliği olan $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ye orantı denir.

ise, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ a ile d ye dışlar, b ile c ye içler denir.

C. ORANTININ ÖZELLİKLERİ

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ise a.d= b.c

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ dır.

2) ise, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ dır.

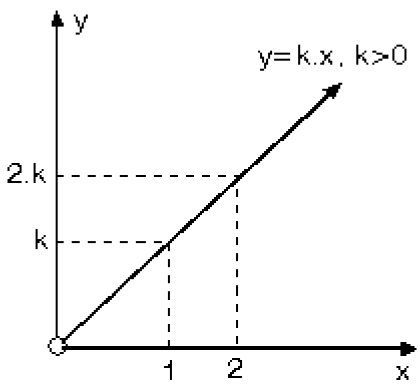
ise, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ dır.

3) m ile n den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise, (k ya orantı sabiti denir.)

- $\frac{m \,.\, a}{m \,.\, b} = \frac{n \,.\, c}{n \,.\, d} = k$ dır.
- $\frac{m \,.\, a + n \,.\, c}{m \,.\, b + n \,.\, d} = k$ dır.
- $\frac{m \,.\, a^2 + n \,.\, c^2}{m \,.\, b^2 + n \,.\, d^2} = k^2$ dir.
- $\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = k^2$ dir.
- $\frac{a}{b} + p = \frac{c}{d} + p = k + p$ dir.
- $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} = \frac{k+1}{k-1}$ dir.

4) a : b : c = x : y : z ise,



Burada, a = x . k

b = y . k

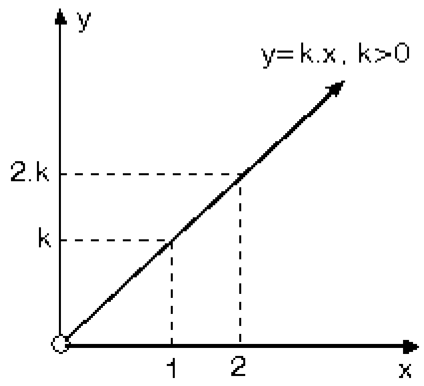
c = z . k dır.

D. ORANTI ÇEŞİTLERİ

1. Doğru Orantılı Çokluklar

Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantılıdır denir.

x ile y doğru orantılı ve k pozitif bir doğru orantı sabiti olmak üzere, y = k . x ifadesine doğru orantının denklemi denir. Bu denklemin grafiği aşağıdaki gibidir.



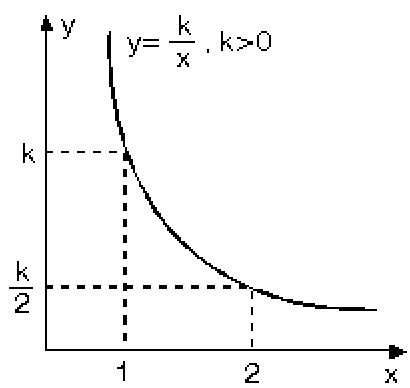
- İşçi sayısı ile üretilen ürün miktarı doğru orantılıdır.
- Bir aracın hızı ile aldığı yol doğru orantılıdır.

2. Ters Orantılı Çokluklar

Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa ya da biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk ters orantılıdır denir.

x ile y ters orantılı ve k pozitif bir ters orantı sabiti olmak üzere, $y = \frac{k}{x}$ ifadesine ters orantının denklemi denir.

Bu denklemin grafiği aşağıdaki gibidir.



- İşçi sayısı ile işin bitirilme süresi ters orantılıdır.

- Bir aracın belli bir yolu aldığı zaman ile aracın hızı ters orantılıdır.

a, b ile doğru c ile ters orantılı ve k pozitif bir orantı sabiti olmak üzere,

$\frac{a}{b} \cdot c = k$ dır.