12.Sınıf Matematik Konu Özeti

1.ÜNİTE ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

Üstel fonksiyon

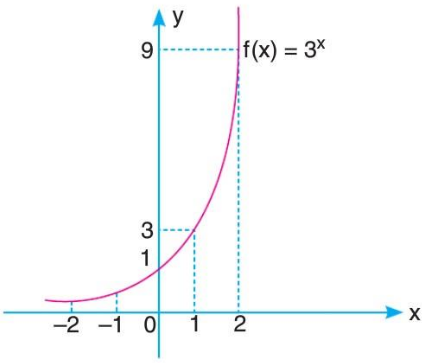
$a \in R^+ - \{1\}$ ve $x \in R$ olmak üzere;

$f: R \to R^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyondur.

I. $a > 1$ ise

$f: R \to R^+$, $f(x) = 3^x$

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	1/9	1/3	1	3	9

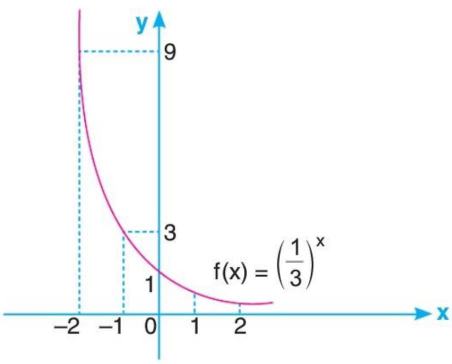


$a > 1$ ise $f(x) = a^x$ artan fonksiyondur.

II. $0 < a < 1$ ise

$f: R \to R^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	9	3	1	1/3	1/9



$0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ azalan fonksiyondur.

Not: **Grafiklere göre hem $a > 1$ için hem de $0 < a < 1$ için üstel fonksiyon bire bir ve örtendir.**

Örnek:

f, g ve h fonksiyonları $R \to R^+$ şeklinde tanımlanmıştır.

$f(x) = (1,3)^x$, $g(x) = (0,3)^x$ ve $h(x) = \left(\frac{1}{1,3}\right)^x$

fonksiyonlarından hangisi ya da hangileri artandır?

A) Yalnız f B) Yalnız g C) Yalnız h

D) f ve h E) f, g ve h

$1,3 > 1 \Rightarrow$ f artandır.

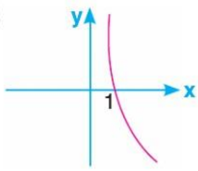
$0 < 0,3 < 1 \Rightarrow$ g azalandır.

$\frac{1}{1,3} = \frac{1}{\frac{13}{10}} = \frac{10}{13}$ ve $0 < \frac{10}{13} < 1 \Rightarrow$ h azalandır.

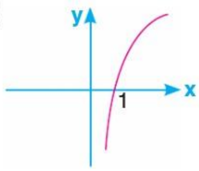
Örnek:

$f(x) = 5^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

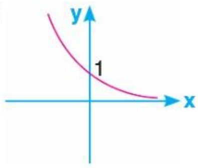
A)



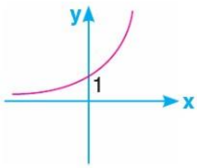
B)



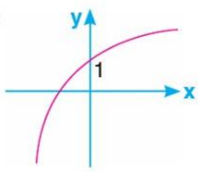
C)



D)



E)



$f(x) = 5^x$ fonksiyonu (0, 1) noktasından geçen artan bir üstel fonksiyon olduğu için yanıt D dir.

Logaritma Fonksiyonu

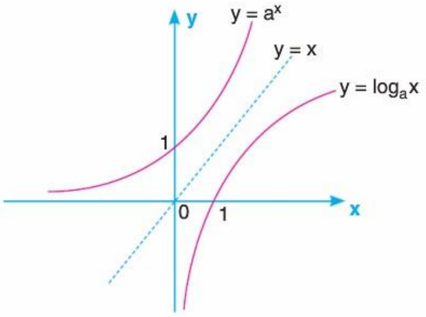
Üstel fonksiyonunun ters fonksiyonuna **logaritma fonksiyonu** denir.

$a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere;

$f: R^+ \to R$, $f(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

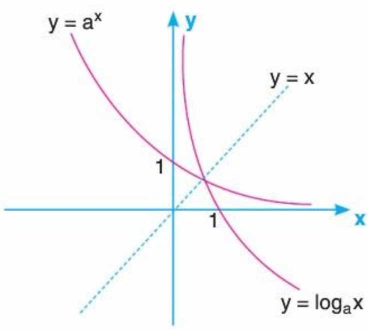
$$\boxed{x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x}$$

i) $a > 1$ olmak üzere



$a > 1$ ise $y = \log_a x$ fonksiyonu artandır.

ii) $0 < a < 1$ olmak üzere



$0 < a < 1$ ise $y = \log_a x$ fonksiyonu azalandır.

Not:

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonu için,

i) $x > 0$ olmalıdır.

ii) $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmalıdır.

Örnek:

$\log_2 x = 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 25 E) 32

$\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$

Örnek:

$\log_3 (x - 2) = 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

$\log_3 (x - 2) = 2 \Rightarrow x - 2 = 3^2 \Rightarrow x = 11$

Örnek:

$f(x) = \log_2 x + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ hangisidir?

A) $f^{-1}(x) = 2^x$

B) $f^{-1}(x) = 2^x - 1$

C) $f^{-1}(x) = 2^{x-1}$

D) $f^{-1}(x) = 1 - 2^x$

E) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

$y = \log_2 x + 1 \Rightarrow x = \log_2 y + 1 \Rightarrow x - 1 = \log_2 y$

$y = 2^{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{x-1}$

Örnek:

$f(x) = \log_{(x-3)} (7 - x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 7) B) (4, 7) C) (4, 7) – {3} D) (3, 7) – {4} E) (3, 4)

$$\left.\begin{array}{l} 7 - x > 0 \Rightarrow x < 7 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (3, 7) - \{4\}$$

Onluk Logaritma Fonksiyonu

f: $R^+ \to R$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda taban a = 10 ise bu logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** (bayağı logaritma ya da Napier logaritma) denir.

$\log_{10} x = \log x$

Doğal Logaritma Fonksiyonu

f: $R^+ \to R$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda taban a = e ise bu logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.

$\log_e x = \ln x$

Örnek:

log10 + log100 + log1000 ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 6 B) 10 C) 1110 D) 10^6 E) 100^{10}

$\log 10 = a \Rightarrow 10^a = 10 \Rightarrow a = 1$
$\log 100 = b \Rightarrow 10^b = 10^2 \Rightarrow b = 2$
$\log 1000 = c \Rightarrow 10^c = 10^3 \Rightarrow c = 3$
$\log 10 + \log 100 + \log 1000 = 1 + 2 + 3 = 6$

Örnek:

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln e^4$

ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) e^3 E) e^4

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = a \Rightarrow e^a = e^{-1} \Rightarrow a = -1$
$\ln e^4 = b \Rightarrow e^b = e^4 \Rightarrow b = 4$
$a + b = -1 + 4 = 3$

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

1. $a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere,
   i) $\log_a 1 = 0$
   ii) $\log_a a = 1$
   iii) $\log_a a^x = x$

2. $a \in R^+ - \{1\}$ ve $b, c \in R^+$ olmak üzere,
   i) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$
   ii) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3. $a \in R^+ - \{1\}$, $b \in R^+$ ve $m, n \in R - \{0\}$ olmak üzere,
   i) $\log_a b^m = m . \log_a b$
   ii) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$

4. $a \in R^+ - \{1\}$, $b, c \in R^+$ olmak üzere,
   i) $a^{\log_a b} = b$
   ii) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

Taban Değiştirme

1. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$

• $\log_5 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 5} = \frac{\log_{33} 7}{\log_{33} 5} = \frac{\ln 7}{\ln 5} = \frac{\log 7}{\log 5}$

2. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

• $\log_3 5 = x \Rightarrow \frac{1}{\log_5 3} = x \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{x}$

3. $\log_a b . \log_b c . \log_c d = \log_a d$

• $\log_a b . \log_b c . \log_c d = \frac{\cancel{\log b}}{\log a} \cdot \frac{\cancel{\log c}}{\cancel{\log b}} \cdot \frac{\log d}{\cancel{\log c}}$

$= \frac{\log d}{\log a} = \log_a d$

AKLINDA OLSUN

$\log 10 = \log(2 \cdot 5) = \log 2 + \log 5 = 1$ olduğundan
$\log 2 = 1 - \log 5$
$\log 5 = 1 - \log 2$
olur.

Üstel Denklemler

Tabanı $a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere üssünde değişken bulunan denklemlere **üstel denklemler** denir.

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ tir.
- $a^{f(x)} = b$ ise $f(x) = \log_a b$ olur.

Logaritmik Denklemler

Bilinmeyenin logaritması bulunan denklemlere **logaritmik denklemler** denir.

$a \in R^+ - \{1\}$

I. $\log_a g(x) = b \Rightarrow g(x) = a^b$

II. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

III. $\log_{h(x)} f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = h(x)^{g(x)}$

$(f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ h(x) > 0 \text{ ve } h(x) \neq 1)$

Üstel ve Logaritmik Eşitsizlikler

1. Üstel Eşitsizlikler

i) $a > 1$ ve $a^x < a^y \Rightarrow x < y$

ii) $0 < a < 1$ ve $a^x < a^y \Rightarrow x > y$

2. Logaritmik Eşitsizlikler

$a, b \in R^+$, $a \neq 1$ olmak üzere

$\log_a f(x) \geq b$ ise

i) $a > 1$ ise $f(x) \geq a^b$ ve $f(x) > 0$

ii) $0 < a < 1$ ise $f(x) \leq a^b$ ve $f(x) > 0$

iii) $a > 1$ ise

$c < \log_a b < d \Rightarrow a^c < b < a^d$ ve $b > 0$

iv) $0 < a < 1$ ise

$c < \log_a b < d \Rightarrow a^c > b > a^d$ ve $b > 0$

Örnek:

$9^x + 2.3^x - 8 = 0$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log_3 2$ B) $\log_2 3$ C) 2 D) 3 E) 2^3

$t^2 + 2t - 8 = 0$

$\underbrace{3^x = -4}_{\text{olamaz}}$, $3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$

Örnek:

$$3\log_{27}(5x-1) + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(x+1) = 1$$

olduğuna göre, $\log_4 x$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

$\log_3(5x-1) - \log_3(x+1) = 1$

$\frac{5x-1}{x+1} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

Örnek:

$3 \leq \log_2(x+1) < 4$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

$3 \leq \log_2(x+1) < 4$ ve $x + 1 > 0$

$2^3 \leq x + 1 < 2^4$ $\quad x > -1$

$7 \leq x < 15 \Rightarrow$ En küçük tam sayı 7 dir.

Örnek:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} < \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-4}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{6x-8}$

$\Rightarrow 2x - 1 > 6x - 8$

$\frac{7}{4} > x$ (En büyük 1)

Örnek:

$7(3^{\log_2 x}) + x^{\log_2 3} = 24$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

$8 . 3^{\log_2 x} = 24 \Rightarrow \log_2 x = 1$

$x = 2$

DİZİ

Pozitif doğal sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona **gerçek sayı dizisi** veya **dizi** denir.

$f: N^+ \to R$ ve $f(n) = a_n$ ise

$f(1) = a_1$ (1. terim)

$f(2) = a_2$ (2. terim)

⋮ ⋮

$f(n) = a_n$ (n. terim veya genel terim) olur.

- **Genel terimi a_n olan dizi,**

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$

şeklinde gösterilir.

Dizinin Özellikleri

- Her dizinin mutlaka genel terimi vardır. Genel terimi olmayan dizi olmaz.
- Bir dizide genel terim a_n şeklinde gösterilir. Genel terimi a_n olan dizi ise (a_n) şeklinde gösterilir.
- $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ dizisinde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dizinin terimleridir.
- Bir dizinin tanımlı olabilmesi için tüm pozitif doğal sayılar için tanımlı olmalıdır.

Sonlu Dizi: Tanım kümesi A = {1, 2, 3, ..., k}, $k \in N^+$ olan diziye sonlu dizi denir. Sonlu olmayan dizilere sonsuz dizi denir.

Eşit Diziler

$\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizileri eşit dizilerdir.

$((a_n) = (b_n))$.

Sabit Dizi

Bütün terimleri birbirine eşit olan diziye **sabit dizi** denir.

Sabit dizinin genel terimi

$(a_n) = (c)$ dir. $(c \in R)$

$(a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = ...)$

$(a_n) = \left(\frac{an + b}{cn + d}\right)$ dizisi sabit dizi ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ dir.

Örneğin,

$(a_n) = (2, 2, 2, ..., 2, ...)$

$(b_n) = (-4, -4, -4, ..., -4, ...)$

$(c_n) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{2}, ...)$

birer sabit dizidir.

Örnek:

Genel terimi

$a_n = (-1)^n (5n + 4)$

olan dizinin ilk üç teriminin toplamı kaçtır?

A) –19 B) –14 C) –9 D) 9 E) 14

$a_1 = -9,\ a_2 = 14,\ a_3 = -19$

$a_1 + a_2 + a_3 = -14$

Örnek:

$\left(\frac{n-2}{4n+1}\right)$

dizisinin kaçıncı terimi $\frac{1}{13}$ tür?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$\frac{n-2}{4n+1} = \frac{1}{13} \Rightarrow 4n + 1 = 13n - 26$

$27 = 9n$

$3 = n$

Örnek:

$(a_n) = \left(\frac{2n + k - 3}{5 - 4n}\right)$

dizisi k'nin hangi değeri için sabit dizi belirtir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

$\frac{2}{-4} = \frac{k-3}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Örnek:

$(a_n) = ((p - 2)n^2 + 2n - 3)$ ve

$(b_n) = (q.n + r)$ dizileri veriliyor.

$\forall n \in N^+$ için $(a_n) = (b_n)$ ise **p . q . r çarpımı kaçtır?**

A) 12 B) 6 C) –3 D) –6 E) –12

$p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2,\ q = 2,\ r = -3$

$p.q.r = -12$

Örnek:

$(a_n) = (\log_{n+3}(n+4))$ dizisi için

$a_1 . a_2 . a_3 . .... a_{12}$ çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$a_1.a_2. ...a_{12} = \log_4 \cancel{5}.\cancel{\log_5}6 .... \cancel{\log_{15}}16 = \log_4 16 = 2$

Aritmetik Dizi ve Özellikleri

Ardışık herhangi iki terimi arasındaki farkı sabit olan dizilere **aritmetik dizi** denir.

$\forall n \in N^+$ için $a_{n+1} - a_n = d$, $d \in R$

d sayısına **ortak fark** denir.

$a_{n+1} - a_n = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$

$(a_n) = (1, 4, 7, 10, 13, ...)$

$(b_n) = (2, 12, 22, 32, ...)$

$\downarrow$

$a_1 = 2$ (İlk Terim) $\underbrace{d = 12 - 2 = 10}_{\text{ortak fark}}$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ (Genel Terim)

Aritmetik Dizinin Özellikleri

1) Birinci terimi a_1, ortak farkı d olan aritmetik dizinin genel terimi

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ dir.

2) Bir aritmetik dizide bir terim kendisinden eşit uzaklıkta bulunan iki terimin toplamının yarısına eşittir.

$$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}, \quad a_{11} = \frac{a_7 + a_{15}}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-7} + a_{n+7}}{2}$$

3) Bir aritmetik dizide ilk n terimin toplamı S_n ise;

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ veya $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ dir.

Örnek:

İlk terimi 15, ortak farkı 4 olan aritmetik dizinin 9. terimi kaçtır?

A) 35 B) 39 C) 43 D) 47 E) 51

$a_9 = a_1 + 8d = 15 + 8 . 4 = 47$

Örnek:

Bir aritmetik dizide, $a_5 = 4$ ve $a_{12} = 32$

olduğuna göre, a_{19} kaçtır?

A) 44 B) 48 C) 52 D) 56 E) 60

$a_{12} = \frac{a_5 + a_{19}}{2} \quad 32 = \frac{4 + a_{19}}{2} \Rightarrow a_{19} = 60$

Örnek:

Bir aritmetik dizide, $a_2 + a_7 = 25$, $a_1 + a_5 = 16$

olduğuna göre, a_{10} kaçtır?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

$a_1 + d + a_1 + 6d = 25 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 25$

$a_1 + a_1 + 4d = 16 \Rightarrow - \; 2a_1 + 4d = 16$

$d = 3$, $a_1 = 2$

$a_{10} = 2 + 9 . 3 = 29$

Örnek:

(a_n) aritmetik dizisinde,

$a_1 = 4$ ve $a_{12} = 38$ olduğuna göre, S_{12} kaçtır?

A) 224 B) 240 C) 248 D) 252 E) 260

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_2)$

$\Rightarrow S_{12} = 6(4 + 38) = 252$

Örnek:

2 ile 29 arasına artan bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde 8 terim yerleştirilirse baştan altıncı terim kaç olur?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 17 E) 19

$2, \underbrace{..........}_{\text{8 terim}}, 29$

$d = \frac{29-2}{8+1} = \frac{27}{9} = 3$ bulunur.

$a_1 = 2$ ve $d = 3$ olduğundan

$a_6 = a_1 + 5d = 2 + 5 . 3 = 17$ bulunur.

Geometrik Dizi ve Özellikleri

Ardışık herhangi iki teriminin oranı sabit olan diziye **geometrik dizi** denir.

$\forall n \in N^+$ için

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

r sayısına **ortak çarpan** veya **ortak oran** denir.

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$

$(b_n) = (2, 6, 18, 54, \dots)$

$a_1 = 2$ (İlk Terim) $\quad r = \underbrace{\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3}_{\text{ortak çarpan}}$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$a_2 = a_1 . r$

$a_3 = a_1 . r . r = a_1 . r^2$

$a_4 = a_1 . r . r . r = a_1 . r^3$

$\vdots$

$a_n = a_1 . r^{n-1}$ (Genel Terim)

Geometrik Dizinin Özellikleri

1) İlk terimi a_1, ortak çarpanı r olan geometrik dizinin genel terimi

$a_n = a_1 . r^{n-1}$ dir.

2) Bir geometrik dizide bir terimin karesi kendisinden eşit uzaklıkta bulunan iki terimin çarpımına eşittir.

$(a_2)^2 = a_1 . a_3 , \quad a_{11} = \sqrt{a_7 . a_{15}}$

$(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

$(a_n)^2 = a_{n-7} . a_{n+7}$

3) Bir geometrik dizide ilk n terimin toplamı S_n ise;

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$ dir.

4) Ortak çarpanı bulmak için

a) Ardışık iki terim verildiğinde,

$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

b) Herhangi iki terim verildiğinde,

$r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}}$ dir.

5) a, ..., b sayıları arasına n terim yerleştirip bir geometrik dizi oluşturmak için

$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

Örnek:

İlk terimi 6 ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin 4. terimi kaçtır?

A) 24 B) 48 C) 64 D) 72 E) 96

$a_4 = a_1 . r^3 = 6 . 2^3 = 48$

Örnek:

Pozitif terimli bir geometrik dizide $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_9 = 8$ **olduğuna göre, a_1 kaçtır?**

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

$\left.\begin{array}{l} a_9 = a_1 . r^8 = 8 \\ a_5 = a_1 . r^4 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Taraf tarafa bölünürse, $r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$

$a_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{32}$

Örnek:

Birinci terimi 3, ortak çarpanı 4 olan geometrik bir dizinin ilk n teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4^n B) $4^n - 1$ C) 2^n D) $3 . 4^n$ E) $3(1 - 2^n)$

$S_n = a_1 . \frac{1-r^n}{1-r} = 3 . \frac{1-4^n}{1-4} = 4^n - 1$

Örnek:

Pozitif terimli bir geometrik dizide $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_9 = 8$ **olduğuna göre, a_1 kaçtır?**

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

$\left.\begin{array}{l} a_9 = a_1 . r^8 = 8 \\ a_5 = a_1 . r^4 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Taraf tarafa bölünürse, $r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$

$a_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{32}$

İki açının toplamının sinüsü, kosinüsü, tanjantı ve kotanjantı

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \, . \, \cos\beta + \sin\beta \, . \, \cos\alpha$ ve
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \, . \, \cos\beta - \sin\beta \, . \, \cos\alpha$ dır.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \, \cos\beta - \sin\alpha \, . \, \sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \, . \, \cos\beta + \sin\alpha \, . \, \sin\beta$ dir.
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \, . \, \tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \, . \, \tan\beta}$ dir.
- $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$ dir.
- $\cot(\alpha-\beta) = -\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$ dir.

Örnek:

$\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ$

ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm:

$$\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ = \sin(20^\circ + 40^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\cos 50^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ$

ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm:

$$\cos 50^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(50^\circ - 20^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin x = \frac{3}{5}$ ve $\cos y = \frac{12}{13}$ olduğuna göre

$\sin(x-y)$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin 105^\circ$ nin eşiti nedir?

Çözüm:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$a + b = \frac{\pi}{6}$ ise $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$$

$$= \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b$$

$$= \underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_{1} + \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_{1} + 2(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$$

$$= 2 + 2 \cdot \cos(a+b)$$

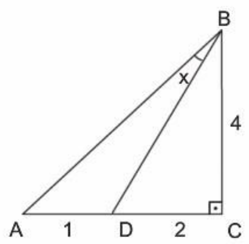
$$= 2 + 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

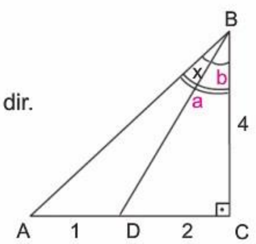
$$= 2 + \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

ABC üçgeninde verilenlere göre tanx kaçtır?



Çözüm:



$x + b = a \Rightarrow x = a - b$ dir.

$$\tan x = \tan(a-b)$$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{22}{16}} = \frac{2}{11} \text{ olur.}$$

Yarım Açı Formülleri

sin2a = 2 sina . cosa,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \text{ dır.}$$

$$\cot 2a = \frac{1}{\tan 2a} \text{ dır.}$$

Örnek:

$\dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 35^\circ}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

Çözüm:

$$\frac{\sin 70^\circ}{\cos 35^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 2\sin 35^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin x = \dfrac{3}{4}$ **ise cos2x ifadesinin eşiti nedir?**

Çözüm:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - \frac{18}{16} = -\frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\dfrac{\cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

Çözüm:

$$\underset{(\sin x)}{\frac{\cos 3x}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{\sin 3x}{\sin x}} = \frac{\cos 3x \cdot \sin x + \sin 3x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{\sin(3x + x)}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{\sin 4x}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2x} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2x}$$
$$= 4\cos 2x \text{ bulunur.}$$

Örnek:

cos25° = x ise cos130° – sin40°

toplamının x cinsinden eşiti nedir?

Çözüm:

$$\cos 130^\circ - \sin 40^\circ = -\cos 50^\circ - \cos 50^\circ = -2\cos 50^\circ \text{ dir.}$$
$$-2\cos 50^\circ = -2(\cos(2 \cdot 25^\circ))$$
$$= -2(2\cos^2 25^\circ - 1)$$
$$= -2(2x^2 - 1)$$
$$= -4x^2 + 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\tan x = \dfrac{1}{2}$ **ise tan2x in değeri nedir?**

Çözüm:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$
$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\tan x - \cot x = \dfrac{3}{5}$ **ise tan2x kaçtır?**

Çözüm:

$$\tan x - \cot x = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \tan 2x = -\frac{10}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

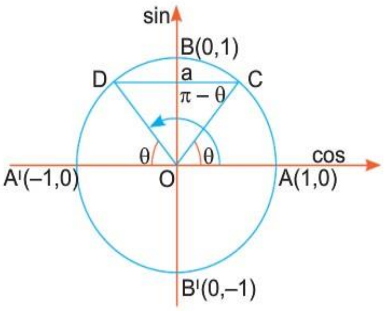
$\cos\left(2\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$ **ifadesinin eşiti nedir?**

Çözüm:

$$\arcsin\frac{2}{3} = x \Rightarrow \sin x = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$
$$\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right) = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ bulunur.}$$

Trigonometrik Denklemler

sinx = a denklemi



Sinüsü a olan açıların, bitim kenarının birim çemberi kestiği noktalar C ve D dir. Bu nedenle $k \in Z$ olmak üzere,

C noktasına, $\theta + k.2\pi$

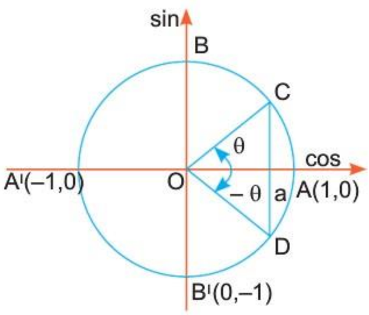
D noktasına, $\pi - \theta + k.2\pi$

gerçek sayıları (açıları) karşılık gelir. Böylece,

- sinx = a denkleminin çözüm kümesi,

  $Ç = \{x \mid x = \theta + k.2\pi \vee x = \pi - \theta + k.2\pi,\ k \in Z\}$ olur.

cosx = a denklemi



Kosinüsü a olan açıların bitim kenarlarının birim çemberi kestiği noktalar C ve D dir.

C noktasına $\theta + k.2\pi$

D noktasına $-\theta + k.2\pi$

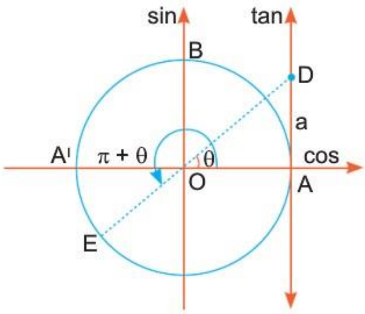
gerçek sayıları (açıları) karşılık gelir.

Bu nedenle;

- cosθ = a denkleminin çözüm kümesi,

  $Ç = \{x \mid x = \theta + k.2\pi \vee x = -\theta + k.2\pi,\ k \in Z\}$ olur.

tanx = a denklemi



Tanjantı a olan açıların, bitim kenarının tanjant eksenini D noktasında kestiğini görünüz.

$\theta + k\pi$

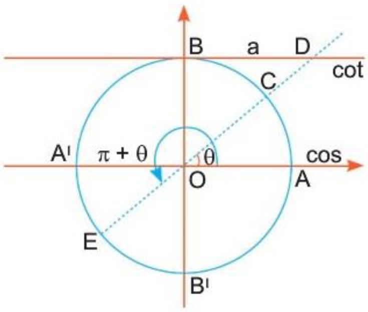
açılarının herbirinin karşılığı D noktasıdır.

Bu nedenle;

- tanx = a denkleminin çözüm kümesi

  $Ç = \{x \mid x = \theta + k.\pi,\ k \in Z\}$

cotx = a denklemi



Kotanjantı a olan açıların, bitim kenarının kotanjant eksenini D noktasında kestiğini görürüz.

$\theta + k\pi$

açılarının her birinin karşılığı D noktasıdır.

Bu nedenle;

- cotx = a denkleminin çözüm kümesi,

  $Ç = \{x \mid x = \theta + k.\pi,\ k \in Z\}$

Örnek:

sinx = sin $\frac{\pi}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

sinx = sin $\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k.2\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = k.2\pi + (\pi - \frac{\pi}{3})$ dir.

$Ç = \{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in Z\}$ olur.

Örnek:

tan $\frac{4x}{3}$ = cot $\frac{\pi}{3}$ denklemini çözelim.

$\tan\frac{4x}{3} = \cot\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan\frac{4x}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ dır.

$\tan\frac{4x}{3} = \tan\frac{\pi}{6}$ dır.

$\tan\frac{4x}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{4x}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi \,.\, k}{4}$

$Ç = \{x : x = \frac{\pi}{8} + k\,.\,\frac{3\pi}{4},\ \ k \in Z\}$

Örnek:

$\cos^2x + 2\cos x - 3 = 0$ denklemini çözelim.

Çarpanlarına ayırma ön işlemi kullanılarak

$\cos^2x + 2\cos x - 3 = (\cos x - 1)(\cos x + 3) = 0$

$\cos x - 1 = 0 \vee \cos x + 3 = 0$

$\cos x = 1 \vee \cos x = -3$ olur.

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0° + k.2\pi$ bulunur.

$\cos x = -3$ olamaz.

Örnek:

sin5x = 2 denkleminin çözümlerini düşününüz.

$\forall x \in R$ için, $-1 \leq \sin 5x \leq +1$ dir.

$2 \notin [-1, 1]$

Bu nedenle,

sin5x = 2 olamaz. Ç = { } dir.

Örnek:

$$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ denkleminde

$2x = x + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x = -x - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 3x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ tür.

O halde, denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in Z\right\}$

Örnek:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ise $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tür.

O halde denklemin çözüm kümesi

$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

Örnek:

cos2x – cosx = 0

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2x - 1 - \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2x - \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x + 1) \cdot (\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2\cos x + 1 = 0 \quad \vee \quad \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = 1$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ ise $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ tür.

$Ç_1 = \left\{x : x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

cosx = 1 ise $\alpha = 0°$ dir.

$Ç_2 = \{x : x = k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$ olur.

Verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ bulunur.