11. SINIF TEMEL DÜZEY MATEMATİK KONU ÖZETİ

1. ÜNİTE : SAYILAR

HAZIR MIYIZ ?

1. Rakam nedir? Rakamların kümesini yazınız.

2. Sonlu ve sonsuz sayı kümelerine birer örnek veriniz.

3. Doğal sayılar (N) , tam sayılar (Z) , rasyonel sayılar (Q) , irrasyonel sayılar (Q'), gerçek sayılar (R) kümeleri arasında alt küme olma özelliklerini yazınız.

4. Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılar dışında başka sayılar var mıdır ?Açıklayınız.

5. 16 205 sayısının yüzler basamağındaki rakam kaçtır ?

6. 5, 9, 13, 17, 21, ... sayı örüntüsünü üç adım daha devam ettiriniz.

7. 7, 9, 11, 13, ..., 33 sayı örüntüsünde kaç tane doğal sayı vardır ?

8. 1+2+3+4...+39 toplamını bulunuz.

9. A = { 1,2,a,b } ve B {2,4,b} kümeleri için $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

10. Hangi sayılar asaldır? Hangi sayılar aralarında asaldır?

11. En küçük 5 asal sayıyı yazınız.

12. Aralarında asal olan iki sayı yazınız.

13. 127 sayısının asal sayı olup olmadığını belirleyiniz.

14. 360 sayısını asal çarpanlarına ayırınız.

15. 96 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini yazınız.

16. Hangi sayılar ardışık iki doğal sayının toplamıdır?

17. Ardışık üç doğal sayının toplamı ortanca sayının kaç katıdır?

18. Tam sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme ve birleşme özelliği var mıdır?

19. Doğal sayılar kümesinde çıkarma işleminin değişme özelliği var mıdır? Örnek vererek açıklayınız.

20. $1,\overline{3}$ = 1 333... sayısını $\frac{b}{a}$ biçiminde yazınız.

GERÇEK SAYILAR VE TEMEL KAVRAMLAR

RAKAM

Sayıları ifade etmeye yarayan

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sembollerine rakam denir.

> - Her rakam bir sayıdır, fakat her sayı bir rakam değildir.

Sayı: Rakamların tek başına ya da birlikte belirttiği çokluğa sayı denir.

ÖRNEK 1 : a,b,c birbirinden farklı rakamlardır. Buna göre ; 3a+b-c ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM : 3a+b-c ifadesinin en büyük değeri için a ve b büyük c değeri ise küçük seçilmelidir .

3.9+8-0 ‘dan cevap 35 bulunur.

3a+b-c ifadesinin en küçük değeri için a ve b küçük c değeri ise büyük seçilmelidir.

3.0+1-9’ dan cevap -8 bulunur.

ÖRNEK 2 : a ve b birer rakam olmak üzere ; 2a+b= 17 ifadesini sağlayan kaç farklı a değeri vardır ?

ÇÖZÜM : 2a+b= 17 ise 2a ifadesi daima çif sayı olacağından toplamın tek sayı olması için b tek sayı seçilmelidir.

b=1 için 2a = 16 ise a = 8

b=3 için 2a = 14 ise a =7

b= 5 için 2a = 12 ise a= 6

b= 7için 2a=10 ise a= 5

olacağından a ‘nın alabileceği 4 farklı değer bulunur.

SAYI KÜMELERİ

1) Sayma Sayıları

Sayma Sayıları: $N^+ = \{1, 2, 3, ...\}$

2) Doğal Sayılar

Doğal Sayılar: $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanlarına doğal sayılar denir.

3) Tam Sayılar

Tam Sayılar: $Z = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ kümesinin elemanlarına tam sayılar denir.Z ile gösterilir.

$Z^+ = 1,2,3,4,5, ...\}$ kümesinin elemanlarına pozitif tam sayılar denir. Z^+ ile gösterilir.

$Z^- = \{...-3 ,-2, -1, \}$ kümesinin elemanlarına negatif tam sayılar denir . Z^- ile gösterilir.

> - Sıfır sayısı negatif ya da pozitif değildir. Sıfır nötr bir sayıdır.

$Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$

- Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.

4) Rasyonel Sayılar

x ve y birer tam sayı ve y sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{x}{y}$ biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel sayı denir .

Rasyonel Sayılar: $Q = \{...-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ...\}$ kümesinin her bir elemanına rasyonel sayı denir. Q ile gösterilir.

- **Her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.**

5) İrrasyonel Sayılar

Rasyonel olmayan yani $\frac{x}{y}$ biçiminde yazılamayan sayılara irrasyonel sayılar denir. Q’ ile gösterilir.

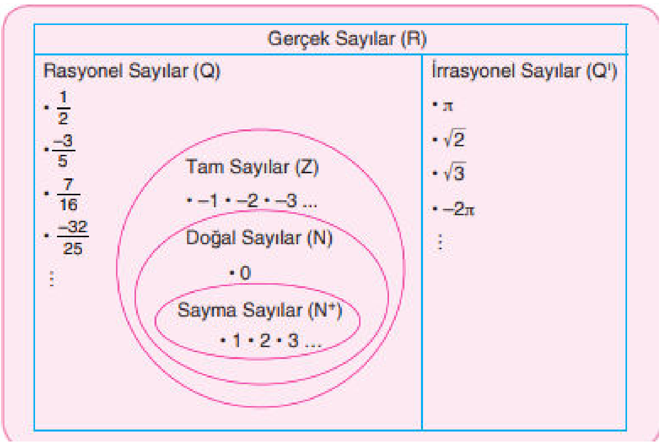
İrrasyonel Sayılar: $Q' = \{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, ...\}$

- **Rasyonel sayı kümesi ile irrasyonel sayı kümesinin kesişimi daima boş kümedir.**
  $Q \cap Q' = \varnothing$

6) Gerçek (Reel) Sayılar

Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayı kümelerinin birleşimi ile oluşan sayı kümesine gerçek (reel) sayılar denir . R ile gösterilir.

Reel (Gerçek) Sayılar: R = Q ∪ Q'



AKLINDA OLSUN

$N^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R$ sayı kümeleri arasında bu şekilde bir bağıntı vardır.

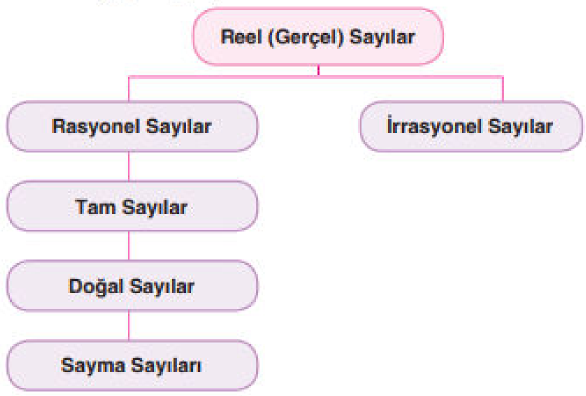
UYARI

$\frac{0}{\text{Sayı}} = 0$

$\frac{\text{Sayı}}{0} = \text{tanımsız}$

$\frac{0}{0} = \text{belirsiz}$

Sayı kümeleri aşağıdaki gibi şemalandırılabilir.



HATIRLAYALIM

Etkisiz Eleman : Gerçek sayılar kümesinde bir gerçek sayı ile 0'ı (sıfır) topladığımızda veya herhangi bir gerçek sayı ile 1'i çarptığımızda aynı gerçek sayıyı elde ederiz. Buna göre toplama işleminin etkisiz elemanı "0"; çarpma işleminin etkisiz elemanı "1"dir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

a∈R için için a+0 = 0+a = a ve

a.1 = 1. a = a 'dır.

Toplama ve Çarpma İşlemlerine Göre Bir Sayının Tersi :

Herhangi iki gerçek sayının toplamı 0 (toplama işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayıdan herbirine toplama işlemine göre diğerinin tersi denir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

a ,(-a) ∈R için ; a+(-a) = (-a) +a = 0 olduğundan a'nın toplama işlemine göre tersi -a' dır.Yani bir sayının toplama işlemine göre tersi sayının zıt işaretlisidir.

Örneğin ;

3 'ün toplama işlemine göre tersi -3

-7'nin toplama işlemine göre tersi +7

$-\frac{8}{5}$ ' in toplama işlemine göre tersi $\frac{8}{5}$ 'dir.

Herhangi iki gerçek sayının çarpımı 1 (çarpma işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayıdan herbirine çarpma işlemine göre diğerinin tersi denir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

a , $\frac{1}{a} \in$ R ve $a \neq 0$ için a . $\frac{1}{a}$ = $\frac{1}{a}$. a = 1 olduğundan a'nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ 'dir.

Yani bir sayının çarpma işlemine göre tersi sayının pay ve paydasının yer değiştirilmesiyle oluşan sayıdır.

Örneğin ;

3' ün çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{3}$

-7' nin çarpma işlemine göre tersi $-\frac{1}{7}$

$\frac{1}{5}$ ' in çarpma işlemine göre tersi 5

$-\frac{8}{5}$ ' in çarpma işlemine göre tersi $-\frac{5}{8}$ 'dir.

Örnek ; -6 ve $\frac{1}{2}$ sayılarının gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerine göre tersini bulunuz .

Doğal ve Tam Sayılar Kümesinde İşlemler

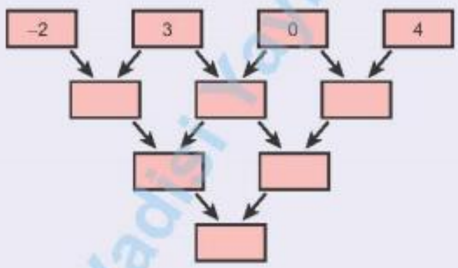
1) Toplama ve Çıkarma İşlemleri

- a ve b pozitif tam sayılar ise a+b toplamıda pozitiftir.
- a ve b negatif tam sayılar ise a+b toplamıda negatiftir.
- a ve b den biri pozitif diğeri negatifse a+b toplamının işareti bu iki sayıdan büyük olanın işaretidir.

Örnek : 10-{ -10 –[-10-(-10)-10] – 10 } işleminin sonucu kaçtır ?

Örnek:

Aritmetik işlemlerin uygulandığı bir şekilde yan yana bulunan iki kutu içerisinde bulunan sayının her ikisi de çift ise sayılar toplanıyor, her ikisi de tek ise büyükten küçük çıkarılıyor ve biri tek biri çift ise küçükten büyük çıkarılıyor ve çıkan sonuçlar okun gösterdiği kutunun içerisine yazılıyor.



Buna göre, en alttaki kutu içerisindeki sayı kaçtır?

2) Çarpma ve Bölme İşlemleri

- Aynı işaretli sayıların bölümü ve çarpımı (+) pozitif
- Ters işaretli sayıların bölümü ve çarpımı (-) negatiftir.

+ . + = +	+ : + = +
+ . - = -	+ : - = -
-. + = -	- : + = -
- . - = +	- : - = +

Not

Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin iç içe olduğu bir işlemde,

1. Parantez içi
2. Üslü sayılar
3. Çarpma ve bölme
4. Toplama ve çıkarma

sıralamasına göre işlem yapılır.

Örnek:

$(-2) \cdot (-4 - (-12 : (-3))) + 144 : 16$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 25 D) 28 E) 32

Örnek:

I. $\boxed{-2}\ \boxed{}\ \boxed{2}$

II. $\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{-2}$

III. $\boxed{-2}\ \boxed{}\ \boxed{-2}$

ifadelerindeki boş kutuların içine toplama (+), çıkarma (–) ve çarpma (x) sembolleri hangi sırayla yerleştirilirse üç işlemin sonucu aynı sayıya eşit olur?

	I	II	III
A)	+	x	–
B)	–	+	x
C)	–	x	+
D)	x	+	–
E)	x	–	+

DOĞAL SAYILARIN ÇÖZÜMLENMESİ İLE İLGİLİ PROBLEMLER

Bir sayıyı oluşturan rakamların her birine, bu sayının basamağı, rakamların bulundukları basamaklara göre aldıkları değerlere basamak değeri, rakamların her birinin değerine ise sayı değeri denir.

8 2 1 3	Basamak Değeri	Sayı Değeri
3	$3 \cdot 1 = 3$	3
1	$1 \cdot 10 = 10$	1
2	$2 \cdot 100 = 200$	2
8	$8 \cdot 1000 = 8000$	8

■ Sayılar çözümlenirken, rakamlar bulunduğu basamağın değeri ile çarpılarak toplanır.

ab = 10a + b,

abc = 100a + 10b + c

abcd = 1000a + 100b + 10c + d gibi

Örnek : 2357 sayısını 10 un kuvvetleri türünden yazalım.

$$2357 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$
$$= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \quad (10^0 = 1)$$

binler
yüzler
onlar
birler

Örnek : 2 405 013 sayısını çözümleyelim.

2 405 013 = 2. 1 000 000+ 4. 100 000 + 0. 10 000+ 5.1000+ 0 .100+ 1. 10+ 3. 1

= 2. 10^6 + 4.10^5+ 0+ 5. 10^3+ 0+ 1. 10^1 +3. 10^0

= 2. 10^6 + 4.10^5+5. 10^3+ 1. 10^1 +3. 10^0

Örnek : 4 .10^5+ 2.10^1+3.10^0 biçiminde verilen doğal sayıyı bulalım.

Verilen sayıda 10^5 ve 10^0 terimli ifadeler bulunduğundan 10^5 ten başlayarak 10^0 a kadar

10 un azalan kuvvetlerini, ardından katsayılarını yazalım.

$$4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = \ldots 10^5 + \ldots 10^4 + \ldots 10^3 + \ldots 10^2 + \ldots 10^1 + \ldots 10^0$$
$$= 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

4 0 0 0 2 3

= 400 023

Çözümlenmiş biçimi verilen doğal sayı 400 023 tür.

HATIRLATMA

Bir sayının basamaklarında yapılan bir işlemde rakamların değişmesi sayının değerini değiştirir.
Örneğin: Bir sayının birler basamağındaki rakamın sayısal değeri 7 arttırılırsa sayının değeri 1 × 7 = 7 artar. Onlar basamağındaki rakamın sayı değeri 5 azaltılırsa sayının değeri 5 × 10 = 50 azalır.

AKLINDA OLSUN

Rakamları farklı en büyük üç basamaklı negatif tam sayı: –102
Rakamları farklı en küçük üç basamaklı negatif tam sayı: –987
Bir sayıdan rakamlarının toplamı çıkartıldığında kalan daima 9'un katıdır.

Örnek : A ve B birer rakam olmak üzere AA, ABA, AAB ve BAAB doğal sayılarını çözümleyelim.

Çözüm :

AA = 10A+A =11A

ABA = 100A + 10B + A = 101A+10B

AAB=100A + 10A + B = 110A+ B

BAAB = 1000B +100A + 10A +B = 1001B +110A

Örnek : A, B, C ve D birer rakam olmak üzere AB, ABC ve ABCD doğal sayılarını çözümleyelim.

Çözüm :

AB = 10A+B

ABC = 100A + 10B +C

ABCD = 1000A+100B+10C+D biçiminde çözümlenir .

Örnek : AB ve BA iki basamaklı birer doğal sayı olmak üzere AB +BA += 187 olduğuna göre A +B toplamını bulalım.

Çözüm : Verilen eşitlikte sayıları çözümlenmiş biçimde yazıp A+ B toplamını bulalım.

AB+BA=187

10A+B + 10B +A = 187

11A + 11B = 187

11(A+B) = 187

A+B = $\frac{187}{11}$ ‘ den A+B = 17 bulunur.

Örnek : AB ve BA iki basamaklı birer sayı olmak üzere AB + BA = 176 olduğuna göre A B + toplamını bulunuz.

Çözüm :

Örnek : AB, BA ve B7 iki basamaklı birer doğal sayı olmak üzere AB - BA= B7 olduğuna göre A B + toplamını bulalım.

Çözüm : Verilen eşitliklerdeki sayıları çözümlenmiş olarak yazalım .

AB – BA = B7

10A +B – 10B +A = B7

9A-9B = B7

9(A-B) = B7……….(1)

Eşitlikte elde edilene göre 9 ile (A-B) çarpılmış ve birler basamağı 7 olan bir sayı elde edilmiştir. Buna göre 9’un 2 basamaklı katları düşünüldüğünde (18,27,36,45,54,63,72,81,90,99) birler basamağı 7 olan tek sayı 27’ dir Buna göre

9.(A-B) = 27 = B7 ‘dir……(2)

Buradan A-B = 3 bulunur.

2. ifadeden B7 = 27 ise B = 2 ‘dir

A-B=3 olduğundan B yerine 2 yazılırsa A = 5 bulunur. Buradan A+B =5+2 =7 ‘dir.

Örnek : İki basamaklı AB doğal sayısı, iki basamaklı BA doğal sayısından rakamlarının toplamı kadar fazladır. Buna göre, A ve B rakamlarını bulalım.

Çözüm :

AB = BA + B+A olacaktır . Çözümleme yapılırsa ;

10A+B = 10B +A +B+A (A lar ve B ler bir tarafa toplanırsa)

8A = 10 B ‘ den

$\frac{A}{B} = \frac{10}{8}$ (sadeleştirme yapılırsa)

$\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$ olacağından A = 5 ve B= 4 bulunur .

Örnek : A ve B birer rakam olmak üzere dört basamaklı 3AB3 doğal sayısı, üç basamaklı 2AB doğal sayısının 9 katının 1255 fazlasına eşittir. Buna göre A ve B rakamlarını bulalım.

Çözüm : 3AB3 = 9. (2AB) +1255 ‘tir

3000 + 100A +10B +3 = 9.(200+10A +B) +1255

3000+100A +10B +3 = 1800 + 90A + 9B +1255

(A ‘ lar , B ler bir tarafa sayılar bir tarafa toplanırsa)

10A +1B = 3055- 3003

10A +B = 52 ‘den AB = 52 ve

A = 5 , B = 2 bulunur.

Örnek : Üç basamaklı ABC doğal sayısının sağına 4 rakamı yazılarak dört basamaklı ABC4 sayısı, soluna 5 rakamı yazılarak dört basamaklı 5ABC sayısı elde ediliyor.
ABC4 + 5ABC = 6379 olduğuna göre A+B+C toplamını bulalım

Çözüm : ABC4 + 5ABC = 6379 ise

1000A +100B+10C+4 + 5000+100A +10B +C=6379'dir.

1100A +110B+11C +5004= 6379

1100A+110B+11C = 6379-5004

11(100A+10B +1C)= 1375

100A+10B+C = $\frac{1375}{11}$ = 125 bulunur .

ABC = 125 ise A = 1 ,B = 2 ,C = 5 olduğundan A+B+C = 1+2+5 = 8'dir.

Örnek : Esra Hanım aldığı gömleğin ücretini ödemek için kasiyere kredi kartını veriyor. Gömleğin fiyatı a lira b kuruş iken kasiyer kredi kartından yanlışlıkla b lira a kuruş çekiyor. Esra Hanım durumu fark ediyor ve hemen kasiyere bildiriyor. Kasiyer de Esra Hanım'a bu davranışı için teşekkür ederek eksik aldığı 19 lira 80 kuruşu kredi kartından tekrar çekiyor. Yukarıda belirtilen a ve b sayıları iki basamaklı birer doğal sayı ve a b + = 70 olduğuna göre gömleğin fiyatını bulalım.

Çözüm : Gömleğin fiyatı a lira b kuruş ve a ile b sayıları iki basamaklı birer doğal sayı olduğuna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (A, B, C ve D birer rakam olmak üzere)

a= AB

b=CD

a+b = 70 ……. (1. Eşitlik)

Gömleğin fiyatı AB,CD biçimindedir. Bu parayı kuruş olarak yazalım.

AB,CD = 100a+b kuruş.
Kasiyerin ilk seferde kredi kartından çektiği miktarı kuruş olarak yazalım.
CD,AB = 100b +a kuruş .
Gömleğin fiyatı ile kasiyerin çektiği miktar arasındaki farkı kuruş olarak yazalım.

$$\begin{aligned} 19 \text{ lira} &= 19 \cdot 100 \text{ kuruş} \\ &= 1900 \text{ kuruş} \\ 19 \text{ lira } 80 \text{ kuruş} &= (1900 + 80) \text{ kuruş} \\ &= 1980 \text{ kuruş} \end{aligned}$$

(100a + b) – (100b +a) = 1980

99a – 99 b = 1980 'den 99(a-b) = 1980

a-b= $\frac{1980}{99}$ = 20 bulunur . …. (2. Eşitlik)

1. Ve 2. Eşitlikten

a+b = 70

a-b = 20 ise taraf tarafa toplanırsa ;

2a= 90 'dan a =45 , b = 25 bulunur . buna göre göleğin fiyatı a lira b kuruştan 25 lira 45 kuruş bulunur.

Örnek : Arzu, telefon faturasını ödemek üzere bankaya gidiyor ve sıra numarasını gösteren işlem fişini alıyor. Sıranın kendisine gelmesine 2 kişi kala yaşlı bir teyzenin ayakta sıra beklediğini görüyor ve ona yardımcı olmak istiyor. Kendi fişini teyzenin fişi ile değiştiriyor. Bu durumda sıranın Arzu'ya gelmesine 24 kişi kalıyor. Arzu'nun fişindeki sıra numarası 3A, teyzenin fişindeki sıra numarası da A7 biçiminde iki basamaklı birer doğal sayı olduğuna göre A harfi hangi rakamın yerine kullanılmıştır? Bulalım.

Çözüm : Arzu ile yaşlı teyze fişlerini değiştirdiği anda sıranın Arzu'ya gelmesine 2 kişi kaldığından bu esnada gişede 3A – 2 sıra numaralı fişe sahip kişinin işlemi yapılıyordur. Arzu ile yaşlı teyze fişlerini değiştirdikten sonra sıranın Arzu'ya gelmesine 24 kişi kaldığından aşağıdaki eşitliği yazabilir ve A rakamını bulabiliriz

A7- (3A-2) =24'ten

10A+7-30-A+2= 24 'ten

9A-21=24'ten 9A = 45

A=5 bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) 742 031 doğal sayısını çözümleyiniz.

2) Çözümlenmiş biçimi $4.10^6 + 2.10^5 + 8.10^3 + 4.10^0$ olan doğal sayıyı yazınız.

3) Üç basamaklı 7AB sayısı, iki basamaklı AB sayısının 21 katına eşittir. Buna göre A B + toplamını bulunuz.

4) Onlar basamağında A rakamı bulunan tüm iki basamaklı doğal sayıların toplamı 245 tir. Buna göre A rakamını bulunuz.

5) Üç basamaklı ABC doğal sayısı ile iki basamaklı AB doğal sayısının toplamı 353 tür. Buna göre A+B+C toplamını bulunuz.

6) Üç basamaklı AAB doğal sayısı, rakamları toplamının 10 katından 108 fazladır. Buna göre A+ B toplamını bulunuz.

7) İki basamaklı AB doğal sayısının sağına 2 eklendiğinde sayının değeri 344 artıyor. Buna göre A+ B toplamını bulunuz.

8) Üç basamaklı A0B doğal sayısı, iki basamaklı AB doğal sayısının 7 katına eşittir. Buna göre A+ B toplamını bulunuz.

9) Üç basamaklı ABC doğal sayısı ile iki basamaklı CA doğal sayısının farkı 350 dir. Buna göre A+B+C toplamını bulunuz.

10) . Üç basamaklı ABC doğal sayısının sağına 5 eklenerek dört basamaklı ABC5 sayısı ve soluna 6 eklenerek dört basamaklı 6ABC sayısı elde ediliyor. ABC5+6ABC = 9536 olduğuna göre A+B+C toplamını bulunuz.

11) . Bir ayakkabı mağazasında çalışan Ali, kampanyaya giren bir ayakkabının fiyatını %25 ucuzlatarak etiketine yazacaktır. Ali, yazması gereken yeni fiyatı belirliyor fakat etikete AB TL yazması gerekirken yanlışlıkla BA TL yazıyor. Bu durumda Ali, ayakkabının fiyatını %43 ucuzlatmış oluyor. Buna göre ayakkabının ilk fiyatını bulunuz.

Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Doğal Sayıların Toplamı

Aşağıda verilen doğal sayıları inceleyelim.

3, 6, 9, 12, ..., 84, 87

Verilen sayılar 3 ile başlamış, üçer artarak devam etmiş ve 87 sayısıyla sonlanmıştır.

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12, \ldots, 84 \xrightarrow{+3} 87$$

Bu doğal sayıların kaç tane olduğunu bulmaya çalışalım.

1. sayı:	$3 = 3 \cdot 1$
2. sayı:	$6 = 3 \cdot 2$
3. sayı:	$9 = 3 \cdot 3$
4. sayı:	$12 = 3 \cdot 4$
⋮	⋮
$(n-1)$. sayı:	$84 = 3 \cdot (n-1)$
n. sayı:	$87 = 3 \cdot n$

Yukarıdaki eşitlikleri incelediğimizde verilen sayıların n tane olduğunu söyleyebiliriz. Peki n değerini nasıl bulabiliriz?

n değerini 87 = 3·n eşitliğinden kolayca bulabiliriz. n değerini bulunuz.

Örnek : 84, 91, 98, ..., 217, 224 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu bulalım.

Çözüm : Bu sayılar 7 ile tam bölünebilen 84 sayısı ile başlamış, yedişer artarak devam etmiş ve 224 sayısıyla sonlanmıştır.

$$84 \xrightarrow{+7} 91 \xrightarrow{+7} 98, \ldots, 217 \xrightarrow{+7} 224$$

Öyleyse verilen sayıların tümü 7 ile bölünür.

$$\begin{array}{ccccc} 84, & 91, & 98, \ldots, & 217, & 224 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 \cdot 12, & 7 \cdot 13, & 7 \cdot 14, \ldots, & 7 \cdot 31, & 7 \cdot 32 \end{array}$$

O hâlde 84, 91, 98, ..., 217, 224 doğal sayılarının sayısı ile 12, 13, 14, ..., 31, 32 doğal sayılarının sayısı eşittir.

$$\underbrace{12, 13, 14, \ldots, 31, 32}_{21 \text{ tane}}$$

12, 13, 14, ..., 31, 32 sayı grubunda 21 tane sayı olduğundan verilen sayı grubunda da 21 tane sayı vardır.

Örnek : 39, 44, 49, ..., 124, 129 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu iki yolla bulalım

Çözüm : Bu sayılar 39 ile başlamış, beşer artarak devam etmiş ve 129 sayısıyla sonlanmıştır.

$$39 \xrightarrow{+5} 44 \xrightarrow{+5} 49, \ldots, 124 \xrightarrow{+5} 129$$

1. sayı 39 = 34+ 5 biçiminde yazılabildiğinden ve diğer sayılar beşer artarak devam ettiğinden verilen tüm sayıları 34 sayısına 5' in katlarını ekleyerek elde edebilir

1. sayı:	$39 = 34 + 5 \cdot 1$
2. sayı:	$44 = 34 + 5 \cdot 2$
⋮	⋮
$(n-1)$. sayı:	$124 = 34 + 5 \cdot (n-1)$
n. sayı:	$129 = 34 + 5 \cdot n$

Yukarıdaki eşitlikleri incelediğimizde verilen sayıların n tane olduğunu söyleyebiliriz.

1. yol: $129 = 34 + 5 \cdot n$ eşitliğine göre $n = 19$ olduğundan 19 tane doğal sayı verilmiştir.

2. yol: Son sayıdan ilk sayıyı çıkaralım. Bulduğumuz sayıyı artış miktarına bölelim.

n. sayı:	$129 = 34 + 5n$
1. sayı:	$-\ 39 = 34 + 5$

$$90 = 5n - 5 \Rightarrow \frac{90}{5} = \frac{5(n-1)}{5} \Rightarrow 18 = n - 1$$

n değeri bulduğumuz 18 değerinden 1 fazladır. $n = 19$ dur.

BİLGİ

Eşit miktarda artarak devam eden sınırlı sayıdaki doğal sayıların kaç tane olduğu

$$\frac{\text{son sayı} - \text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}} + 1$$

formülüyle bulunur.

Örnek : 14, 20, 26, ..., 170, 176 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu bulalım.

Çözüm : Verilen sayılar 14 ile başlamış, altışar artarak devam etmiş ve 176 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri formülde yerlerine yazalım.

$\frac{Son\ sayı - ilk\ sayı}{artış\ miktarı}+1 = \frac{176-14}{6}+1 = \frac{162}{6}+1$

= 27+1 = 28 tane olduğu bulunur.

Örnek : 70, 77, 84, ..., 210, 217, ..., 343, 350, 357 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

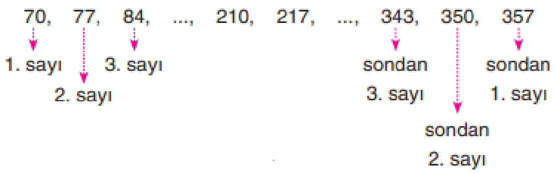
b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm :

a. Verilen sayılar 70 ile başlamış, yedişer artarak devam etmiş ve 357 sayısıyla sonlanmıştır. Buna göre kaç tane sayı verildiğini bulalım.

$\frac{357-70}{7}+1 = \frac{287}{7}+1 = 41+1 = 42$ tane sayı verilmiştir.

b. Bu 42 sayının toplamını bulmak için sayıları aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Baştan 1. sayı ile sondan 1. sayıyı toplayalım. $70 + 357 = 427$

Baştan 2. sayı ile sondan 2. sayıyı toplayalım. $77 + 350 = 427$

Baştan 3. sayı ile sondan 3. sayıyı toplayalım. $84 + 343 = 427$

⋮

Baştan 21. sayı ile sondan 21. sayının toplamı da 427 olur.

Verilen 42 sayıyı ikişer ikişer grupladığımızda $\frac{42}{2} = 21$ sayı çifti elde ederiz. Bu sayı çiftlerinin her birinin toplamı 427'dir.

Buna göre bu sayı çiftlerinin toplamını çarpma ile bulabiliriz. 21. 427 = 8967 olur.

Verilen doğal sayıların sayısı bu örnekte olduğu gibi bir çift sayı ise sayıların toplamını bu yöntemle bulabiliriz.

Örnek : 8, 17, 26, ..., 152, 161, 170 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

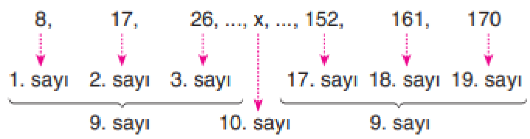
b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm :

a. Verilen sayılar 8 ile başlamış, dokuzar artarak devam etmiş ve 170 sayısıyla sonlanmıştır. Buna göre kaç tane sayı verildiğini bulalım.

$\frac{170-8}{9}+1 = \frac{162}{9}+1 = 18+1 = 19$ tane sayı verilmiştir. (1)

b. Bu 19 sayının toplamını bulmak için sayıları aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Şimdi de en ortadaki sayıyı (yani 10. sayıyı) bulmak için 1. sayı olan 8 in üzerine 9 defa 9 u ekleyelim

1. sayı ... 10. sayı

8, 17, 26, 35, •, •, •, •, •, x, ..., 152, 161, 170

+9 +9 +9 +9 +9 +9 +9 +9 +9

Buna göre aşağıdaki eşitliği yazıp x'i bulabiliriz.

X = 8 + 9.9 = 8+81 = 89 'dur.(2)

(1) Ve (2) eşitliklerde bulduğumuz değerleri aşağıdaki formülde yerine yazıp verilen sayı grubunun toplamını bulabiliriz.

$$\begin{matrix}\text{Sayı grubunun}\\ \text{toplamı}\end{matrix} = \left(\begin{matrix}\text{Gruptaki doğal}\\ \text{sayıların sayısı}\end{matrix}\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{Grubun}\\ \text{ortanca sayısı}\end{matrix}\right)$$

= 19. 89 = 1691

Tüm sayıların topmı 1691 'dir.

> Verilen doğal sayıların sayısı yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir tek sayı ise sayıların toplamını bu yöntemle bulabiliriz.

Örnek : 20, 28, 36, ..., 116, 124, 132 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm :

a.Verilen sayılar 20 ile başlamış, sekizer artarak devam etmiş ve 132 sayısıyla sonlanmıştır. O hâlde bu sayılar

$\frac{132-20}{8}$ +1 = $\frac{112}{8}$ +1 = 14+1= 15 tanedir.

b. Verilen sayıları önce veriliş sırasında sonra da ters (azalan) sırada alt alta yazarak taraf tarafa toplayalım.

20,	28,	36,	...,	116,	124,	132
+ 132,	+ 124,	+ 116,	...,	+ 36,	+ 28,	+ 20
152,	152,	152,	...,	152,	152,	152

Böylece 15 tane 152 sayısı elde ettik. Bu sayıların toplamı da verilen sayıların toplamının iki katına eşit olduğundan 20, 28, 36, ..., 116, 124, 132 sayılarının toplamı

$\frac{15.152}{2}$ = 76.15= 1140'tır .

> **BİLGİ**
>
> Eşit miktarda artarak devam eden sınırlı sayıdaki doğal sayıların toplamı
>
> $$\left(\frac{\text{son sayı} + \text{ilk sayı}}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{\text{son sayı} - \text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}} + 1\right)}_{\text{Verilen sayıların sayısı}}$$
>
> formülüyle bulunur.

Örnek : Aşağıda verilen doğal sayılarının toplamını bulalım.

a. 19, 23, 27, ..., 107, 111, 115

b. 19, 25, 31, ..., 103, 109, 115

Çözüm :

a. Verilen sayılar 19 ile başlamış, dörder artarak devam etmiş ve 115 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri yukarıdaki formülde yerine yazalım.

$(\frac{115+19}{2}) . (\frac{115-19}{4} + 1) = \frac{134}{2} (\frac{96}{4} +1)$
=67.25 = 1675 bulunur.

b. Verilen sayılar 19 ile başlamış, altışar artarak devam etmiş ve 115 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri yukarıdaki formülde yerine yazalım.

$(\frac{115+19}{2})(\frac{115-19}{6} +1) = \frac{134}{2} (\frac{96}{6} +1)$ = 67.17 =1139 bulunur.

Örnek : Dünyada sadece Şanlıurfa Birecik'te ve Fas'ta bulunan kelaynak kuşlarının en önemli özelliklerinden birisi tek eşli olmalarıdır. Bolluk, bereketi simgeleyen ve Birecik'in sembolü olan bu kuşlar; bozkırların ve geleneksel tarım yapılan arazilerin kaybı, beslenme alanlarının yok olması ve üreme alanlarındaki insan baskıları gibi nedenlerle yok olma tehlikesi altındadır. Kelaynakların yok olmasını önlemek amacıyla Orman Genel Müdürlüğü tarafından 1977 yılında "Kelaynak Üretme İstasyonu" kurulmuştur. Kelaynak Üretme İstasyonu'nun kurulduğu 1977 yılında

5 kelaynak doğaya bırakılmış olsun. Sonraki yıllarda ise doğaya bırakılan kelaynakların sayısının bir önceki yıla göre 3 arttığını varsayalım. Buna göre 2017 yılı sonu itibariyle doğaya bırakılan kelaynakların toplam sayısını bulalım.

Çözüm : Yıllara göre doğaya bırakılan kelaynak sayısını bulalım.

1977 yılında (1. yıl) =5
1978 yılında (2. yıl) = 5 +3.1 = 8
1979 yılında (3. yıl) = 5+ 3.2= 11

. . .

2016 yılında (40. yıl) 5 +3.39 =122
2017 yılında (41. yıl) 5 + 3.40= 125

Yıllara göre doğaya bırakılan kelaynak sayılarını yazalım.

5, 8, 11, ..., 122, 125

Böylece, 5 ile başlayan üçer artarak devam eden ve 125 ile sonlanan 41 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım.

1. sayı ile 41. sayıyı toplayalım. 5 +125 = 130

2. sayı ile 40. sayıyı toplayalım. 8 + 122 = 130

....

20. sayı ile 22. sayının toplamı da 130 olacaktır. 62 + 68 = 130

Toplamları 130 olan 20 sayı çifti elde ettik.
21. sayı 5 + 20.3 = 65 tir.

O hâlde tüm sayıların toplamı 20·130 + 65 = 2665 olduğundan 2017 yılı sonu itibariyle toplam 2665 kelaynak doğaya bırakılmıştır.

Örnek : Bir antik tiyatroda arka arkaya dizilmiş 20 sıra hâlinde oturma yeri vardır. İlk sıra 44 kişiliktir. Ondan sonraki her sıraya bir önceki sıradan 21 kişi fazla oturabilmektedir. Bu tiyatronun kaç kişilik olduğunu bulalım.

Çözüm :

1. sırada 44 kişilik yer vardır.
2. sırada 44 + 21 = 65 kişilik yer vardır.
3. sırada 65 + 21= 86 kişilik yer vardır.

4. sırada 86 + 21= 107 kişilik yer vardır. Diğer sıralardaki oturma yeri sayısını gösteren aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

Sıra Numarası	Oturma Yeri Sayısını Veren İfade	Oturma Yeri Sayısı
1.	44	44
2.	$44+1\cdot21$	65
3.	$44+2\cdot21$	86
4.	$44+3\cdot21$	107
⋮	⋮	⋮
19.	$44+18\cdot21$	422
20.	$44+19\cdot21$	443

Son sütunda elde ettiğimiz sayıları yazalım.
44, 65, 86, 107, ..., 422, 443

Böylece 44 ile başlayan yirmi birer artarak devam eden ve 443 ile sonlanan 20 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım. Elde ettiğimiz birinci sayı ile yirminci sayının toplamını bulalım.

44 + = 443 487 . Aynı düşünce ile,

İkinci sayı ile on dokuzuncu sayının toplamı 487, Üçüncü sayı ile on sekizinci sayının toplamı 487, . . . Onuncu sayı ile on birinci sayının toplamı 487 dir.

Böylece toplamları 487 olan 10 sayı çifti elde edildiğinden tiyatro 487 .10= 4870 kişiliktir.

Örnek : Otogar yapımı ihalesini alan bir inşaat firması, şartnameye göre otogarı 29 Ekim 2018 tarihinde bitirerek teslim edecektir. Eğer teslimat gecikirse firma, İlk hafta için 5000 TL, İkinci hafta için 6500 TL, Üçüncü hafta için 8000 TL olacak biçimde, geciktiği her hafta için bir önceki cezadan 1500 TL fazla tazminat ödeyecektir. Örneğin 4 haftalık gecikme için firmanın ödeyeceği tazminat, 5000 + 6500 +8000 + 9500 = 29 000 TL olacaktır. Bu firma otogarı belirtilen tarihten 10 hafta sonra teslim ederse ödeyeceği toplam tazminat miktarını bulalım.

Çözüm : Firmanın geciktiği her hafta için ödeyeceği tazminat miktarlarını bulalım.

1.hafta için 5000 TL
2. hafta için 5000 +1.1500= 6500 TL
3. hafta için 5000 + 2. 1500 = 8000 TL....

10. hafta için 5000 +9. 1500 = 18 500 TL

Firmanın geciktiği haftalara göre ödeyeceği tazminat miktarlarını yazalım.

5000,	6500,	8000, ...,	18 500
↓	↓	↓	↓
1. hafta	2. hafta	3. hafta	10. hafta

Böylece 5000 ile başlayan bin beş yüzer artarak devam eden ve 18 500 ile sonlanan 10 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım.

$$\left(\frac{son\ sayı+ilk\ sayı}{2}\right).\left(\frac{son\ sayı-ilk\ sayı}{artış\ miktarı}+1\right)$$

$$\left(\frac{18500+5000}{2}\right).\left(\frac{18500-5000}{1500}+1\right)$$

$$\frac{23500}{2}\left(\frac{13500}{1500}+1\right) = 11.750\ .10 = 117.500TL$$

ALIŞTIRMALAR

1) 15, 21, 27, ..., 609 doğal sayıları veriliyor.
 a. Kaç tane sayı verildiğini bulunuz.
 b. Verilen tüm sayıların toplamını bulunuz.

2) 28, 40, 52, ..., 256 doğal sayıları veriliyor.
 a. Kaç tane sayı verildiğini bulunuz.
 b. Verilen tüm sayıların toplamını bulunuz.

3) Aysun, kumbarasına ilk gün 6 TL atıyor. Sonra, her gün bir öncekinden 3 TL fazla atarak bu işe devam ediyor. Buna göre Aysun'un kumbarasında 15 günde kaç TL birikmiştir?

4) Bir sinemanın ön sırasında 14 koltuk, bundan sonraki her sırada ise bir öncekinden 3 fazla koltuk vardır. Bu sıralar önden başlayarak arkaya doğru A, B, C, D, E ve F olarak isimlendirildiğine göre sinema kaç kişiliktir?

5) Bir okulda yapılan atık pil toplama kampanyasında her gün bir önceki günden 4 pil fazla toplanmıştır. Bu okulda ilk gün 9 pil toplandığına göre kampanyanın onuncu günü sonunda toplanan toplam pil sayısını bulunuz.

6) Ceren, yaz tatilinde ilk gün 7 matematik problemi çözüyor ve her gün çözdüğü problem sayısını bir önceki güne göre 4 artırıyor. Buna göre Ceren'in bir ayda çözdüğü toplam problem sayısını bulunuz.

TAM SAYILARDA BÖLÜNEBİLME KURALLARI

1896 yılından bu yana gerçekleştirilen modern olimpiyat oyunları bundan sonra da her 4 yılda bir (savaş nedeniyle 1916, 1940 ve 1944 yılları hariç) yapılmıştır. Acaba 2018 yılında olimpiyat oyunları yapılacak mıdır? Olimpiyatların hangi yıllarda yapılacağını nasıl bulabiliriz?

A, C, B, k birer doğal sayı ve A > C olmak üzere,

$$\begin{array}{r|l} A & C \\ \cline{2-2} - \quad & B \\ \hline k & \end{array}$$

A sayısının C sayısı ile bölümünden kalan k sayısıdır.

A = B · C + k ve C > k dir.

A: Bölünen C: Bölen B: Bölüm k: Kalan

- k < B ise C ile B yer değiştirebilirler.
- k = 0 ise A sayısı C sayısına tam bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 5 \\ \cline{2-2} -10 & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$ 12: Bölünen 5: Bölen 2: Bölüm 2: Kalan

$$\begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$ Burada 3 > 1 olduğu için $$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$$ şeklinde de yazabiliriz.

- Doğal sayılar için verilecek olan bölünebilme kuralları tam sayılar için de geçerlidir.

Örnek : 34 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm : 34 = + 8 4· 2 biçiminde yazılabilir. Buna göre 34 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir.

Örnek : a tam sayısının 14 ile bölümünden elde edilen bölüm 6 ve kalan 3 olduğuna göre a sayısını bulalım.

Çözüm : a tam sayısının 14 ile bölümünden elde edilen bölüm 6 ve kalan 3 olduğuna göre a sayısını bulalım.

$$\begin{array}{r|l} a & 14 \\ \vdots & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

O halde a = 14.6 + 3 ‘ten 87 bulunur.

2 İLE BÖLÜNEBİLME

Birler basamağındaki rakamı çift olan doğal sayılar 2 ile bölünür.

Örnek : 2 ile bölünebilen üç basamaklı, dört basamaklı ve beş basamaklı doğal sayılar yazalım.

Çözüm : 566, 3074 ve 70 852 sayılarının birler basamağındaki rakamlar sırasıyla 6, 4 ve 2 dir. Bu rakamlar çift olduğundan verilen sayılar 2 ile bölünür.

Birler basamağı 0 ,2,4,6,8 olan tüm sayılar 2 ile tam bölünür.

Örnek : Dört basamaklı 716A doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre A yerine yazılabilecek rakamların toplamını bulalım.

Çözüm : A yerine yazılabilecek rakamlar 0, 2, 4, 6 ve 8’dir. Bu sayıların toplamı 0+2+4+6+8= 20’ dir .

Örnek : Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 68A7B doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre A+ B toplamının alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm : A +B toplamının alabileceği en büyük değeri bulmak için A ve B rakamlarının alabileceği en büyük değerleri bulmalıyız. Sayının rakamlarıyla ilgili herhangi bir koşul olmasaydı B’nin alabileceği en büyük değer 8 olurdu. Ancak sorunun kökünde sayının rakamlarının birbirinden farklı olduğu belirtildiğinden B rakamı 8 olamaz. Aynı nedenle B rakamı 6 da olamaz. Öyleyse A ve B rakamlarının alabileceği en büyük değerler sırasıyla 9 ve 4 olur.

Buna göre A + B toplamının alabileceği en büyük değer 9 +4 = 13’tür .

Örnek : Rakamları birbirinden farklı dört basamaklı A39B doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre A + B toplamının alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulalım.

Çözüm : B’nin alabileceği en küçük değer 0 ve A’nın alabileceği en küçük değer 1’dir. Öyleyse A+ B toplamının alabileceği en küçük değer 1+ 0 = 1’dir.

B’nin alabileceği en büyük değer 8 ve A’nın alabileceği en büyük değer 7’dir. Öyleyse A+ B toplamının alabileceği en büyük değer
8 + 7 = 15’ tir.

3 İLE BÖLÜNEBİLME

- Bir doğal sayının rakamları toplamı 3 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 3 ile bölünür.
- Bir doğal sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : Altı basamaklı 205 140 doğal sayısının 3 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

Çözüm: 2+0+5+1+4+0 = 12 sayısı 3 ile böldüğünden verilen sayı 3 ile bölünür.

Örnek : Dört basamaklı 5A36 doğal sayısı 3 ile bölünebildiğine göre A yerine gelebilecek rakamları bulalım.

Çözüm : Verilen sayının rakamları toplamını bulalım.

5+A+3+6 = 14+A

A yerine 1, 4 ve 7 rakamı geldiğinde 14 + A sayısı 3 ile bölünebildiğinden 5A36 sayısı da 3 ile bölünür.

Örnek : On iki basamaklı 442223333555 doğal sayısının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm : Verilen sayının rakamları toplamını bulalım.

4+4+2+2+2+3+3+3+3+5+5+5 = 41

41 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğu için verilen on iki basamaklı sayının da 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

4 İLE BÖLÜNEBİLME

• Bir doğal sayının son iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 4 ile bölünür.

• Bir doğal sayının son iki basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : 328, 50 996, 302 704 sayılarının 4 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

Çözüm : Verilen sayıların son iki rakamını oluşturduğu iki basamaklı 28, 96 ve 04 sayıları 4 ile bölündüğünden verilen sayılar da 4 ile bölünür

Örnek : Beş basamaklı 53 13A doğal sayısı 4 ile bölünebildiğine göre A yerine yazılabilecek rakamları bulalım.

Çözüm : Verilen sayının 4 ile bölünebilmesi için 3A sayısının 4 ile bölünmesi gerekir. Bunun için A yerine 2 ve 6 rakamlarından biri gelmelidir.

Örnek : 3 ile bölünebilen üç basamaklı 3A2 doğal sayısının 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre A rakamını bulalım.

Çözüm : 3A2 doğal sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamının 3 ile bölünebilmesi gerekir. Sayının rakamları toplamını bulalım.

3+A+2 = 5+A

5 + A toplamının 3 ile bölünebilmesi için A yerine 1, 4 ve 7 rakamları gelebilir.

A yerine 1 rakamı gelirse sayımız 312 olur. 312 sayısının son iki basamağı 12 4 ile bölünür.

A yerine 4 rakamı gelirse sayımız 342 olur. 342 sayısının son iki basamağı 42 4 ile bölündüğünde kalan 2 dir.

A yerine 7 rakamı gelirse sayımız 372 olur. 372 sayısının son iki basamağı 72 4 ile bölünür.

O hâlde A rakamı 4 olmalıdır.

Örnek : Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 95 1A3 doğal sayısının 4 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : 95 1A3 ve A3 sayılarının 4 ile bölümünden elde edilen kalanlar eşit olduğundan A3 sayısının da 4 ile bölümünden kalan 1 dir. Öyleyse A3 sayısının 1 eksiği yani A2 sayısı 4 ile bölünür. Buna göre A yerine 1, 3, 5, 7 ve 9 rakamları gelebilir. 95 1A3 sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan A= 7 olmalıdır.

5 İLE BÖLÜNEBİLME

• Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile bölünür.

• Bir doğal sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Son basamağı 0 ya da 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür .

Örnek : Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

a. 785 b. 3920 c. 44 382

Çözüm : a ve b seçeneklerinde verilen sayıların birler basamaklarındaki rakamlar sırasıyla 5 ve 0 olduğundan bu sayılar 5 ile bölünür. c seçeneğinde verilen sayının birler basamağındaki rakam (2 rakamı) 0 ya da 5 olmadığından bu sayı 5 ile bölünmez.

Örnek : 438A sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalanın 3 olması için A yerine yazılabilecek rakamları bulalım.

Çözüm : A rakamı 3 ya da 8 olursa 438A sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olur.

Örnek : 4 ile bölünen beş basamaklı 78 45A doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : Verilen sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 1 olduğundan A yerine 1 ve 6 rakamları gelebilir. 78 45A sayısının 4 ile bölünebilmesi için 5A sayısının 4 ile bölünebilmesi gerekir. 51 sayısı 4 ile bölünmediğinden A = 6 olmalıdır.

8 İLE BÖLÜNEBİLME

• Bir doğal sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayı 8 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 8 ile bölünür.

• Bir doğal sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : Dört basamaklı 36A2 doğal sayısı 3 ve 8 ile bölünebilmektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : 36A2 sayısının 8 ile bölünebilmesi için 6A2 sayısının 8 ile bölünmesi gerekir. 600 sayısı 8 ile bölündüğünden 6A2 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A2 sayısının 8 ile bölünmesi gerekir. Öyleyse A yerine 3 ve 7 rakamları gelebilir.

3632 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

3+6+3+2 = 14 . 14 sayısı 3 ile bölünmediğinden 3632 sayısı da 3 ile bölünmez.

3672 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

3+6+7+2 = 18 18 sayısı 3 ile bölündüğünden 3672 sayısı da 3 ile bölünür. Öyleyse A =7 olmalıdır.

Örnek : 5 ile bölünebilen, rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 19 6AB doğal sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir. Buna göre A +B toplamını bulalım.

Çözüm : 19 6AB sayısının 5 ile bölünebilmesi için B yerine 0 ya da 5 rakamı gelmelidir. 19 6A5 sayısı tek olduğundan bu sayının bir çift sayıyla örneğin 8 ile bölümünden elde edilen kalan tektir. Öyleyse B yerine 5 rakamı gelemez, B = 0 ‘ dır.

19 6A0 ve 6A0 sayılarının 8 ile bölümünden elde edilen kalanlar eşit olduğundan 6A0 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir.

600, 640 ve 680 sayıları 8 ile bölünebildiğinden 610, 650 ve 690 sayılarının 8 ile bölümünden elde edilen kalanlar 2 dir.

Öyleyse A yerine 1, 5 ve 9 rakamları gelebilir.

Öyleyse A yerine 1, 5 ve 9 rakamları gelebilir.

O hâlde A +B = 5+ 0 = 5 bulunur.

9 İLE BÖLÜNEBİLME

• Rakamları toplamı 9 ile bölünebilen doğal sayılar 9 ile bölünür.

• Bir doğal sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 9 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : Altı basamaklı 8A7 B25 doğal sayısı 9 ile bölünebilmektedir. Buna göre A + B toplamının alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm : Sayının rakamlarının toplamını bulalım.

8+A+7+B+2+5 = 22+A+B

A ve B birer rakam olmak üzere, 22 +A+ B sayısının 9 ile bölündüğü göz önüne alındığında A +B toplamı 5 ya da 14 olabilir.

O hâlde A +B toplamının alabileceği en büyük değer 14 tür.

Örnek : 8 ile bölünebilen, rakamları birbirinden farklı dört basamaklı A2B4 doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan 3 tür. Buna göre A + B toplamını bulalım.

Çözüm : A2B4 sayısı 8 ile bölünebildiğinden 2B4 sayısı da 8 ile bölünür. Diğer taraftan 200 sayısı 8 ile bölünebildiğinden B4 sayısı da 8 ile bölünür.

8 in birler basamağı 4 olan iki basamaklı katları 24 ve 64 tür. Öyleyse B yerine 2 ya da 6 rakamı gelebilir. A2B4 sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan B yerine 2 rakamı gelemez, B =6 dır.

A264 sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olduğundan bu sayının rakamları toplamı olan 12 + A sayısının da 9 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Öyleyse A yerine 0 ya da 9 rakamı gelebilir. Verilen sayının 4 basamaklı olduğu dikkate alındığında A yerine 0 rakamı gelemez, A =9 dur.

O hâlde A+ B = 9+ 6 = 15 bulunur.

10 İLE BÖLÜNEBİLME

• Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile bölünür.

• Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : 477, 5260, 67 284 sayılarının 10 ile bölümünden elde edilen kalanları bulalım.

Çözüm : Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalana eşit olduğundan

477 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 7,
5260 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 0,
67 284 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 4 tür.

Örnek : Rakamları birbirinden farklı dört basamaklı 25AB doğal sayısı 8 ve 10 ile bölünebilmektedir. Buna göre A+ B toplamını bulalım.

Çözüm : 25AB sayısı 10 ile bölünebildiğinden B yerine 0 rakamı gelmelidir. Öyleyse 25A0 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı belirleyelim.

5A0 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A yerine 2 ya da 6 rakamı gelmelidir. 25AB sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan A yerine 2 rakamı gelemez, A =6 dır.

O hâlde A +B= 6 0 + = 6 bulunur.

Örnek : Beş basamaklı A2 36B doğal sayısının 10 ve 9 ile bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla 5 ve 4 tür. Buna göre A+ B toplamını bulalım.

Çözüm : A2 36B sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 5 olduğundan B yerine 5 rakamı gelmelidir. A2 365 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

A+2+3+6+5= 16+A

A bir rakam olmak üzere, 16 + A toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalanın 4 olması için 16 + A sayısı 22, A rakamı da 6 olmalıdır

O hâlde A B + = 6 5 + = 11 bulunur.

11 İLE BÖLÜNEBİLME

Bir doğal sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için sayının basamaklarındaki rakamlar sağdan sola doğru +,-,+,-+,... biçiminde işaretlenir ve yeni işaretleriyle tüm rakamlar toplanır. Bu toplamın 11 ile bölümünden elde edilen kalan, verilen sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalana eşit olur.

Örnek : 248 713 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm : 248 713 sayısının basamaklarındaki rakamları sağdan sola doğru aşağıdaki gibi işaretleyelim.

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

3-1+7-8+4-2 = 3

2 4 8 7 1 3
− + − + − +

3 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olduğundan 248 713 sayısının da 11 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür.

Örnek : Beş basamaklı 3A 423 doğal sayısının 11 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : 3A 423 sayısının basamaklarındaki rakamları sağdan sola doğru aşağıdaki gibi işaretleyelim.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & A & 4 & 2 & 3 \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

3-2+4-A+3 = 8-A

A bir rakam olmak üzere, 8 - A sayısının 11 ile bölünebilmesi için 8 –A = 0 ve böylece A= 8 olmalıdır. Bu durumda 38 423 sayısı 11 ile bölünür. O hâlde A yerine 8 rakamı gelmelidir.

Örnek : Dört basamaklı 81A4 doğal sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : 81A4 sayısının rakamlarını işaretleyelim.

$$\begin{array}{cccc} 8 & 1 & A & 4 \\ - & + & - & + \end{array}$$

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

4-A+1-8 = -A – 3

A bir rakam olmak üzere, -A - 3 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalanın 1 olması için - A-3 =-10 ve böylece A = 7 olmalıdır. Bu durumda 8174 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. O hâlde A yerine 7 rakamı gelmelidir.

ARALANDA ASAL OLMA

a tam sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi A ve b tam sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi B olsun. A ve B kümelerinin 1 den başka ortak elemanı yoksa “a ve b tam sayıları aralarında asaldır.” denir. Bu kural ikiden fazla sayı için de geçerlidir.

Örnek : a. 6 ve 35 b. 14 ve 15 c. 18 ve 21 sayılarının aralarında asal olup olmadıklarını gösterelim.

Çözüm :

a. 6 nın bölenleri kümesi $A = \{1, 2, 3, 6\}$
35 in bölenleri kümesi $B = \{1, 5, 7, 35\}$
$\Rightarrow A \cap B = \{1\} \Rightarrow$ 6 ve 35 sayıları aralarında asaldır.

b. 14 ün bölenleri kümesi $C = \{1, 2, 7, 14\}$
15 in bölenleri kümesi $D = \{1, 3, 5, 15\}$
$\Rightarrow C \cap D = \{1\} \Rightarrow$ 14 ve 15 sayıları aralarında asaldır.

c. 18 in bölenleri kümesi $E = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
21 in bölenleri kümesi $F = \{1, 3, 7, 21\}$
$\Rightarrow E \cap F = \{1, 3\} \Rightarrow$ 18 ve 21 sayıları aralarında asal değildir.

ARALARINDA ASAL İKİ SAYININ ÇARPIMI İLE BÖLÜNEBİLME

6, 12, 15 VE 18 İLE BÖLÜNEBİLME

a ve b aralarında asal iki tam sayı ise a ve b ile bölünebilen bir doğal sayı a . b çarpımı ile de bölünür.

- 2 ve 3 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 2 ve 3 ile bölünebilen bir doğal sayı 2 .3 = 6 ile de bölünür.
- 3 ve 4 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 3 ve 4 ile bölünebilen bir doğal sayı 3 .4 = 12 ile de bölünür.
- 3 ve 5 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 3 ve 5 ile bölünebilen bir doğal sayı 3 .5= 15 ile de bölünür.
- 2 ve 9 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 2 ve 9 ile bölünebilen bir doğal sayı 2 .9 = 18 ile de bölünür.

Örnek : 126 sayısının 6 ile bölündüğünü gösterelim

Çözüm : 126 sayısının birler basamağındaki rakam (6) çift olduğundan 126 sayısı 2 ile bölünür.

126 sayısının rakamları toplamı 1+2+6 = 9 dur. 9 sayısı 3 ile bölünebildiğinden 126 sayısı da 3 ile bölünür. 126 sayısı 2 ve 3 ile bölünebildiğinden 6 ile de bölünür.

Örnek : 7314 sayısı 12 ile bölünebilir mi? Araştıralım.

Çözüm : 7314 sayısının rakamları toplamı 7+3+1+ 4 = 15 tir. 15 sayısı 3 ile bölünebildiğinden 7314 sayısı da 3 ile bölünür. 7314 sayısının son iki basamağının oluşturduğu 14 sayısı 4 ile bölünmediğinden 7314 sayısı da 4 ile bölünmez. 4 ile bölünmeyen bir sayı 12 ile de bölünmez.

Örnek : Beş basamaklı 54 27A sayısının 15 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm : Verilen sayı 3 ve 5 ile bölünürse 15 ile de bölünür. 54 27A sayısının 5 ile bölünebilmesi için A yerine 0 ya da 5 rakamı gelmelidir. 54 275 sayısının rakamları toplamı olan 23 sayısı 3 ile bölünmez. Öyleyse 54 275 sayısı 3 ile bölünmediğinden 15 ile de bölünmez. Diğer taraftan 54 270 sayısının rakamları toplamı olan 18 sayısı 3 ile bölünür. Öyleyse 54 270 sayısı da 3 ile bölünür. O hâlde A yerine 0 rakamı gelmelidir.

- 12 ve 15 ile bölünebilen her doğal sayı 12·15 = 180 ile bölünebilir mi?
- 120, 360 ve 480 sayılarının 12 ve 15 ile bölünüp bölünmediğini belirleyiniz.
- 120, 360 ve 480 sayılarının 180 ile bölünüp bölünmediğini belirleyiniz.
- 4, 5 ve 9 ile bölünebilen bir doğal sayı 180 ile bölünebilir mi?

Örnek : Aşağıda verilen sayıların 18 ile bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

a. 73 425 b. 4384 c. 438 156

Çözüm :

a. Verilen sayının birler basamağındaki rakam tek olduğundan sayı 2 ile bölünmez. 2 ile bölünmeyen bir sayı 18 ile de bölünmez.

b. Verilen sayının birler basamağındaki rakam çift olduğundan sayı 2 ile bölünür. 4384 sayısının rakamları toplamına eşit olan 19 sayısı 9 ile bölünemediğinden 4384 sayısı da 9 ile bölünmez. 4384 sayısı 9 ile bölünemediğinden 18 ile de bölünmez.

c. Verilen sayının birler basamağındaki rakam çift olduğundan sayı 2 ile bölünür. Verilen sayının rakamları toplamına eşit olan 27 sayısı 9 ile bölünebildiğinden bu sayı da 9 ile bölünür. 438 156 sayısı 2 ve 9 ile bölünebildiğinden 18 ile de bölünür.

Örnek : 4 ve 6 ile bölünebilen bir doğal sayı 24 ile bölünebilir mi? Araştıralım.

Çözüm: 4 ve 6 ile bölünebilen en küçük doğal sayı 12 dir. 12 nin tek sayı katlarını ele alalım. 12, 36, 60, ... sayıları 4 ve 6 ile bölünebilirken 24 ile bölünmez. Bu durum verilen bilgilerle çelişmez, çünkü 4 ve 6 sayıları aralarında asal değildir. 3 ve 8 sayıları aralarında asal olmak üzere, 3.8 = 24 olduğundan 3 ve 8 ile bölünebilen bir doğal sayı 24 ile de bölünür.

Örnek : Dört basamaklı 73AA doğal sayısı 36 ile bölünebildiğine göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

Çözüm :

ALIŞTIRMALAR

1) . 827 sayısının 13 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.
2) 35 ile 127 sayıları arasındaki 2 ile bölünebilen doğal sayıların sayısını bulunuz.
3) 2 ile bölünebilen fakat 3 ile bölünemeyen iki, üç ve dört basamaklı birer doğal sayı yazınız.
4) Dört basamaklı 7A2B doğal sayısı 2 ve 3 ile bölünebilmektedir. Buna göre A+B oplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.
5) Beş basamaklı A7 3A2 doğal sayısının 3 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir. Buna göre A yerine gelebilecek rakamların toplamını bulunuz.

6) 3 ile bölünebilen üç basamaklı 97A doğal sayısı 2 ile bölünememektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

7) Üç basamaklı 94A doğal sayısı 3 ve 4 ile bölünebilmektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

8) Dört basamaklı 67A2 doğal sayısının 3 ve 4 ile bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla 1 ve 2 dir. Buna göre A yerine gelebilecek rakamı bulunuz.

9) 4 ile bölünebilen beş basamaklı 24 38A doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Buna göre A yerine gelebilecek rakamı bulunuz.

10) 5 ile bölünebilen fakat 3 ile bölünemeyen iki basamaklı doğal sayıları yazınız.

11) 5 ile bölünebilen üç basamaklı 3AA doğal sayısı 2 ile bölünememektedir. Bu doğal sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

12) Üç basamaklı 71A doğal sayısı 8 ile bölünebilmektedir. Bu doğal sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

13) Altı basamaklı 674 2A0 doğal sayısının 9 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulunuz.

14) Altı basamaklı 978 4A2 doğal sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 5 tir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

15) 6 ve 8 ile bölünebilen fakat 48 ile bölünemeyen iki basamaklı en büyük doğal sayıyı bulunuz

BİR TAM SAYININ POZİTİF TAM SAYI BÖLENLERİ

Bir tarladan her birinin alanı 24 m^2 olan dikdörtgen biçiminde hobi bahçeleri oluşturulacaktır. Kenar uzunlukları (metre türünden) birer tam sayı olmak üzere kaç farklı biçimde bahçe oluşturulabileceğini bulalım.
Bahçenin bir kenarının uzunluğu 1 m olursa diğer kenarının uzunluğu 24 m olur.
Bahçenin bir kenarının uzunluğu 2 m olursa diğer kenarının uzunluğu 12 m olur.
Bahçenin bir kenarının uzunluğu 3 m olursa diğer kenarının uzunluğu 8 m olur.
Bahçenin bir kenarının uzunluğu 4 m olursa diğer kenarının uzunluğu 6 m olur.
O hâlde oluşturulacak bahçeler aşağıdaki boyutlarda olabilir:

1 x 24
2 x 12
3 x8
4 x 6

Başka bir deyişle bahçelerin kenar uzunlukları 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24 metre olabilir. Bu sayıların her biri 24 sayısını kalansız olarak böler.

> Her pozitif tam sayı, iki pozitif tam sayının çarpımı biçiminde yazılabilir. Bu sayılardan her birine, verilen sayının pozitif tam sayı böleni ya da çarpanı denir.

Örnek : 42 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulalım.

Çözüm : Çarpımları 42 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\left.\begin{aligned}42 &= 1\cdot 42\\ &= 2\cdot 21\\ &= 3\cdot 14\\ &= 6\cdot 7\end{aligned}\right\}$$

O hâlde 42 sayısının pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 ve 42 dir.

Örnek : 72 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulalım.

Çözüm : Çarpımları 72 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\begin{aligned} 72 &= 1 \cdot 72 \\ &= 2 \cdot 36 \\ &= 3 \cdot 24 \\ &= 4 \cdot 18 \\ &= 6 \cdot 12 \\ &= 8 \cdot 9 \end{aligned}$$

O hâlde 72 sayısının pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ve 72 dir

ASAL SAYI

11 ve 29 sayılarının pozitif tam sayı bölenlerini bulmaya çalışalım. Bunun için çarpımları 11 ve 29 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$11 = 1.\ 11$$

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 sayılarına tam bölünmediği için 11 sayısının başka pozitif tam sayı böleni yoktur. O hâlde 11 sayısının çarpanları 1 ve kendisidir.

$$29 = 1 \ .\ 29$$

Benzer biçimde 29 sayısının da 1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmadığını söyleyebiliriz.

> 1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmayan 1 den büyük doğal sayılara asal sayı denir. Örneğin 2, 3, 5, 7, 11, 13 ve 17 birer asal sayıdır. 2 hariç bütün asal sayılar tek sayıdır.

60 sayısının asal çarpanlarını bulalım. Kullandığımız yöntemi açıklayalım. Açıklayacağımız yönteme göre 60 sayısını aşağıdaki gibi çizginin sol tarafına yazalım. En küçük asal sayı olan 2 den başlayarak ve deneyerek 60 ı bölen asal sayıları bulmaya çalışalım.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

2 sayısı 60 ı böler. Elde edilen bölümü yani 30 u sol tarafa 60 ın altına yazalım. Elde edilen 30 sayısını bölen en küçük asal sayıyı bulmaya çalışalım. 2 sayısı 30 u böler. 30 un karşısına 2 yi yazalım. Elde edilen bölümü yani 15 i 30 un altına yazalım. 2 sayısı 15 i bölmez. 3 sayısı 15 i böler. 3 sayısını 15 in karşısına yazalım. Elde edilen bölümü yani 5 i 15 in altına yazalım. 5 i bölen en küçük asal sayı 5 tir. Bu nedenle 5 in karşısına 5 yazalım. 5 in altına 1 yazalım.

O hâlde 60 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 5 tir. 60 sayısını asal çarpanlarına ayrılmış biçimde yazalım.

$$60 = 2^2 \ .\ 3^1 . 5^1$$

Örnek : 204 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm :

204	2
102	2
51	3
17	17
1	

$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$

204 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 17 dir.

BİR TAM SAYININ POZİTİF TAM SAYI BÖLENLERİNİN SAYISI

84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulmak için aşağıdaki gibi çarpımları 84 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\begin{aligned} 84 &= 1.\ 84 \\ &= 2\ .\ 42 \\ &= 3.\ 28 \\ &= 4\ .21 \\ &= 6\ .14 \\ &= 7\ .12 \end{aligned}$$

84 ün pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 ve 84 tür. Buna göre 84' ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 12 dir. Acaba 84 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını başka bir yolla bulabilir miyiz? Önce 84' ü asal çarpanlarına ayıralım ve asal çarpanların çarpımı biçiminde yazalım.

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

84 'ün asal çarpanlarının üslerini göz önüne alalım.

2^2 nin üssü 2 dir.

3^1 in üssü 1 dir.

7^1 in üssü 1 dir.

Elde ettiğimiz 2, 1, 1 sayılarının her birine 1 ekleyelim.

2 + 1= 3

1 + 1 = 2

1 + 1 = 2

Bulduğumuz 3, 2 ve 2 sayılarının çarpımı, 84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını verir.

3 .2.2= 12

84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 12 dir.

BİLGİ

Bir a pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}$ ise bu a sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $= (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_m + 1)$

Örnek : 504 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım

Çözüm : Önce 504 ü asal çarpanlarına ayırarak asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazalım.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ (7 nin üssünün 1 olduğunu hatırlayınız.)

504 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\text{Bölenlerin sayısı} = (3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$$

504 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 24 tür.

Örnek : 288 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm : Önce 288 i asal çarpanlarına ayırarak asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazalım.

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$288 = 2^5 \cdot 3^2$

288 in pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\text{Bölenlerin sayısı} = (5+1)\cdot(2+1) = 6\cdot 3 = 18$$

288 in pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 18 dir.

Örnek : 3000...0 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 98'dir. Buna göre bu sayıda kaç tane sıfır rakamı olduğunu bulalım.

Çözüm : Bu sayıdaki sıfırların sayısı n olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$3000...0 = 3 \cdot 10^n = 3^1 \cdot 2^n \cdot 5^n$$

Verilen sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı (1+1) .(1+n).(1+n) olur. Bu çarpımı 98 sayısına eşitleyip n değerini bulalım.

(1+1) .(1+n).(1+n) = 98

2. $(n+1)^2 = 98$
$(n+1)^2 = 49 \Rightarrow |n+1| = 7$
$n > 0$ olduğundan $n = 6$ bulunur.
Verilen sayıda 6 tane sıfır vardır.

Örnek : Bir matematik öğretmeni şöyle bir tanım yapıyor: Asal çarpanlarının toplamına bölünebilen doğal sayılara "asil sayı" denir. Örnek vermek gerekirse 60 bir asil sayıdır çünkü 60 sayısı asal çarpanları olan 2, 3 ve 5 sayılarının toplamı olan 10 sayısına bölünür.

1. 45 bir asil sayı mıdır? Açıklayınız.

2. İki basamaklı en büyük asil sayıyı bulunuz.
3. Asal çarpanları 2, 3 ve 5 olan üç basamaklı en küçük asil sayıyı bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıların pozitif tam sayı bölenlerini bulunuz.

a. 35 b. 44 c. 54

2. 40 ile 50 sayıları arasındaki asal sayıları .yazınız.

3. Aşağıdaki sayıların asal çarpanlarını bulunuz.
a. 96 b. 105 c. 120

4. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırınız. Verilen sayıları asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız.

a. 6 b. 136 c. 264

5. 1152 sayısını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız. Aynı sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

6. Aşağıda asal çarpanlarının çarpımı biçiminde verilen sayıları ve bu sayıların pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını belirtiniz.

a. $2^3 . 3 . 5$ b. $2\ 3^2 .5^2$ c. $2. 3. 5^2. 7$

ç. $2^5. 11$ d. 5^3 e. 7^2

7. Bir tam sayının tek sayıda pozitif tam sayı böleni olabilir mi? Açıklayınız.

8. Asal çarpanları aynı ve pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı eşit olan iki tam sayı eşit olmayabilir. Bu durumu belirten bir örnek bulunuz.

9. 12 tane pozitif tam sayı böleni olan iki basamaklı tam sayıları yazınız.

10. Asal çarpanları aynı olan iki tam sayıdan büyük olanının daha fazla sayıda pozitif tam sayı böleni olduğu söylenebilir mi? Açıklayınız.

1. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1.a bir tam sayı olmak üzere , $\frac{a+5}{a}$ ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 3 D) 4 E) 6

2.I. Her tam sayı bir doğal sayıdır.

II. Her tam sayı bir rasyonel sayıdır.

III. Her gerçek sayı bir rasyonel ya da irrasyonel sayıdır.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız II B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

3.a bir pozitif rasyonel sayı olduğuna göre;

I. $\sqrt{a}$ ∈ Q ise a ∈Q ‘dır.

II. $\sqrt{a}$ ∈ Q ise $\sqrt{a+1}$ ∈ Q ‘dır.

III. $\sqrt{a-1}$ ∈ Z^+ ise $\sqrt{a}$ ∈ Q ‘dur.
ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II

E) II ve III

4. Sayı kümeleriyle ilgili aşağıda verilenlerden hangisi yanlıştır?

A) N ⊂ Q B) Z ⊂ Q C) Q ⊂ R D)Z ⊂ Q’ E) Q’ ⊂ R

5. $\sqrt{18}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangisiyle çarpılırsa bir tam sayı elde edilir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{4}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{10}$

6. Aşağıdakilerden hangisi bir rasyonel sayıdır?

A$\sqrt{0.09}$ B) $\sqrt{0,75}$ C) $\sqrt{0,8}$ D) $\sqrt{2,5}$ E) $\sqrt{1,5}$

7. $\frac{a-4}{a}$- ifadesi bir tam sayıya eşit olduğuna göre a sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{6}{4}$ D) $\frac{6}{8}$ E) $\frac{9}{8}$

8. Aşağıdaki rasyonel sayılardan hangisi $\sqrt{5}$ ile $\sqrt{10}$ sayıları arasında değildir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{4}{11}$

9. Aşağıdakilerden hangisi -4 ile -3 sayıları arasında olan bir rasyonel sayıdır?

A) $-\frac{9}{2}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) $-\frac{10}{3}$ D) $-\frac{11}{3}$ E) $-\frac{11}{4}$

10. $\frac{53}{12}$ile $\frac{16}{3}$sayıları arasında olan tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11. 30 480 sayısının çözümlenmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 .10^4 + 4.\ 10^2 + 8.\ 10^1$

B) $3.\ 10^3 + 4.\ 10^2 + 8.\ 10^0$

C) $3.\ 10^4 + 4.\ 10^3 + 8.\ 10^1$

D) $3.\ 10^4 + 4.\ 10^2 + 8.\ 10^0$

E) $3.\ 10^3 + 4.\ 10^1 + 8.\ 10^0$

12. AA ve AB iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere AA + AB = 129 olduğuna göre A+ B toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

13. Üç basamaklı ABC ve iki basamaklı AB doğal sayılarının toplamı 357 dir. Buna göre A+B+C toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14. Üç basamaklı 8AB doğal sayısı, iki basamaklı AB doğal sayısının 26 katına eşittir. Buna göre A + B toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. A ve B rakamlarından oluşan iki basamaklı AA ve AB doğal sayıları veriliyor. Bu doğal sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 25 B) 43 C) 67 D) 110 E) 123

16. 9 ile başlayan altışar artarak devam eden ve 87 sayısıyla sonlanan doğal sayılar veriliyor. Buna göre kaç tane doğal sayı verilmiştir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

17. 8 ile başlayan yedişer artarak devam eden ve a sayısıyla sonlanan 15 doğal sayı veriliyor. 8, 15, 22, ..., a -7 , a Bu doğal sayıların en büyüğü yani a kaçtır?

A) 106 B) 109 C) 113 D) 116 E) 120

18. 6, 15, 24, ..., 51, 60 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların toplamı kaçtır?

A) 215 B) 219 C) 223 D) 231 E) 237

19. 5 ile başlayan dörder artarak devam eden 21 doğal sayı veriliyor. Bu sayıların toplamı kaçtır?

A) 915 B) 925 C) 930 D) 940 E) 945

20. Bir tiyatro salonunda art arda dizilmiş 10 sıra koltuk vardır. Salonun en ön sırasında 8 koltuk vardır. Diğer sıralardaki koltuk sayısı bir ön sıradaki koltuk sayısından 3 fazladır. Buna göre tiyatro salonunda kaç koltuk vardır?

A) 215 B) 218 C) 221 D) 224 E) 225

21. Ayşe bir kitabın ilk gün 5 sayfasını, 6. gün 20 sayfasını okuyarak kitabı 11 günde bitirmiştir. Ayşe'nin kitabı okumaya başladığı günden itibaren okuduğu sayfa sayısı her gün eşit miktarda artmıştır. Buna göre Ayşe'nin okuduğu kitap kaç sayfadır?

A) 220 B) 230 C) 240 D) 250 E) 260

22. 907 sayısının 17 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanın toplamı kaçtır?

A) 48 B) 51 C) 54 D) 56 E) 59

23. 4 ile bölünebilen 3 ile bölünemeyen iki basamaklı kaç doğal sayı vardır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

24. Üç basamaklı A4B doğal sayısı 4 ile bölünürken 6 ile bölünmemektedir. Buna göre A +B toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

25. 18 ile bölünebilen beş basamaklı A5 74B doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Buna göre A + B toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

26. Dört basamaklı rakamları farklı 74AB doğal sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Bu doğal sayı 5 ile bölünebildiğine göre A +B toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 11 E) 12

27. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) 4 ve 6 ile bölünebilen her doğal sayı 24 ile de bölünür.

B) 4 ve 9 ile bölünebilen her doğal sayı 36 ile de bölünür.

C) 6 ve 9 ile bölünebilen her doğal sayı 54 ile de bölünür.

D) 6 ve 15 ile bölünebilen her doğal sayı 90 ile de bölünür.

E) 8 ve 12 ile bölünebilen her doğal sayı 96 ile de bölünür.

28. $2^2 . 3. 5^3$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 30

29. 50 ile 70 sayıları arasında kaç tane asal sayı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. ÜNİTE : ÜÇGENLER

HAZIR MIYIZ?

1. Aşağıdaki sayıları $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.
   a. $\sqrt{45}$ b. $\sqrt{72}$ c. $\sqrt{108}$

2. Aşağıdaki sayıları $\sqrt{a}$ biçiminde yazınız.
   a. $4\sqrt{2}$ b. $5\sqrt{3}$ c. $6\sqrt{5}$

3. Bir üçgenin kenarları üzerine kurulan karelerin alanları 16, 25 ve 60 birimkaredir. Bu üçgenin çevre uzunluğunu bulunuz.

4. Köşegen uzunluğu $2\sqrt{6}$ birim olan karenin çevre uzunluğunu ve alanını bulunuz.

5. Kenar uzunlukları $3\sqrt{2}$ ve $5\sqrt{2}$ birim olan 15 eş dikdörtgen yan yana ve alt alta getirilerek bir kare elde ediliyor. Elde edilen bu karenin köşegen uzunluğunu bulunuz.

6. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan a pozitif tam sayılarını bulunuz.
   a. $a^2+(a+1)^2=(a+2)^2$
   b. $a^2+(a+7)^2=(a+8)^2$
   c. $a^2+(a+17)^2=(a+18)^2$

7. Bir üçgenin kenarları üzerine kurulan karelerin alanları 16, 36 ve 52 birimkaredir. Bu üçgenin kenar uzunlukları küçükten büyüğe doğru a, b ve c ile gösterilirse a, b ve c sayıları arasında bir bağıntı yazınız.

8. Bir torbada 5 sarı, 8 beyaz ve 12 kırmızı top vardır. Bu torbadaki topların,
   a. Sarı topların sayısının beyaz topların sayısına oranını bulunuz.
   b. Beyaz topların sayısının kırmızı topların sayısına oranını bulunuz.
   c. Kırmızı topların sayısının torbadaki tüm topların sayısına oranını bulunuz.

9. Bir dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğunun uzun kenarın uzunluğuna oranı $\frac{3}{5}$ tir. Bu dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu 20 birim olduğuna göre kısa kenarının uzunluğunu bulunuz.

10. Bir ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{BCD}) = 90°$

$m(\widehat{CAB}) = \alpha$

$|AB| = 6\sqrt{5}$ birim

$|BC| = 6$ birim

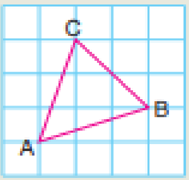
$|CA| = 12$ birim olduğuna göre,

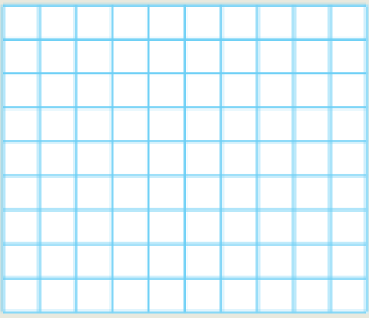
a. α açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranını bulunuz.

b. α açısına komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranını bulunuz.

c. α açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun diğer dik kenarın uzunluğuna oranını bulunuz.

11.





Yukarıda verilen ABC üçgeninin $\frac{2}{1}$ oranında büyütülmüşünü yan tarafına çiziniz.

12. Arda ve Buket'in boyları sırasıyla 160 ve 150 cm'dir. Arda'nın gölgesinin uzunluğu 80 cm olduğu bir anda Buket'in gölgesinin uzunluğunun ne kadar olacağını tahmin ediniz.

DİK ÜÇGENLER

DİK ÜÇGENLERLE İLGİLİ PROBLEMLER

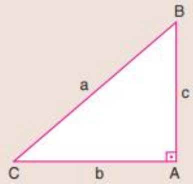
HATIRLAYALIM

Dik Üçgen ve Pisagor Bağıntısı

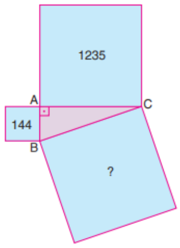
Pisagor bağıntısına göre, "Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.". Hipotenüs, dik açının karşısındaki kenardır. Dolayısıyla bir dik üçgende en uzun kenardır.

Şekildeki $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde hipotenüsün uzunluğu a birim, dik kenarların uzunlukları b birim ve c birim olmak üzere Pisagor bağıntısı şöyle yazılır:

$a^2 = b^2 + c^2$



Örnek : Yandaki şekilde m (A) = 90°dir. ABC dik üçgeninin AB kenarının üzerine kurulan karenin alanı 144 birimkare, AC kenarının üzerine kurulan karenin alanı 1235 birimkaredir. Buna göre BC kenarının üzerine kurulan karenin alanı kaç birimkaredir? Bulalım.



Çözüm: Dik üçgende Pisagor bağıntısını yazalım.

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ Verilenleri bu bağıntıda yerlerine yazalım.

$|BC|^2 = 144+1235 = 1379$. BC kenarı üzerine kurulan karenin alanı 1379 birimkaredir.

Örnek : Bir kenar uzunluğu a birim olan bir eşkenar üçgenin yükseklik uzunluğunu a türünden bulalım.

Çözüm :

$|AB| = |AC| = |BC| = a$ (Eşkenar üçgen tanımı)

$|BH| = |HC| = \frac{a}{2}$ (Eşkenar üçgende yükseklik aynı zamanda kenarortaydır.)

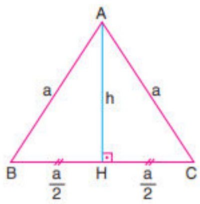
ABH dik üçgeninde,

$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2$ (Pisagor bağıntısı)

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

$a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ birim bulunur.



Örnek :

Televizyon almak için bir mağazaya gittiğinizde satış sorumlusu size kaç inç televizyon istediğinizi sorar. Aslında sizden öğrenmek istediği, televizyon ekranının köşegen uzunluğudur. İnç, bir uzunluk ölçüsü birimi olup 2,54 cm'ye eşittir. Kenar uzunlukları cm türünden verilen yandaki televizyonun ekran boyutunun kaç inç olduğunu yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm :

Pisagor bağıntısını kullanarak ekranın köşegen uzunluğunu (k) bulalım.

$$k^2 = 44^2 + 80^2 \Longrightarrow k^2 = 1936 + 6400$$
$$= 8336$$
$$k \approx 91 \text{ cm}$$

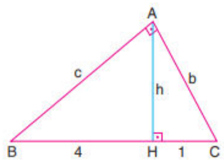
91 cm'yi inç türünden yazalım. $\dfrac{91}{2,54} \approx 36$

O hâlde televizyon yaklaşık olarak 36 inçtir.

İnç biriminin gösterimi " biçimindedir.
36 inç: 36"

Örnek :

Yandaki ABC dik üçgeninde
$m(\widehat{CAB}) = 90°$
$m(\widehat{AHC}) = 90°$
$|BH| = 4$ birim
$|HC| = 1$ birim
olduğuna göre h, b ve c uzunlukları kaç birimdir? Bulalım.



Çözüm : ABC dik üçgeninde $|AH|$ doğru parçası hipotenüse ait yüksekliktir. Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabilir, gerekli hesaplamaları yapabiliriz.

$$h^2 = 4 \cdot 1 \quad \text{(Öklid teoremi)}$$
$$= 4$$
$$h = 2$$

O hâlde $h = 2$ birimdir.

BHA dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla c uzunluğunu bulalım.

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |HA|^2$$
$$= 4^2 + 2^2$$
$$= 16 + 4$$
$$= 20$$
$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

O hâlde $c = 2\sqrt{5}$ birimdir.

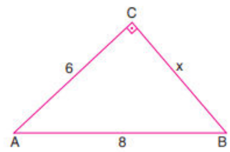
AHC dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla b uzunluğunu bulalım.

$$|CA|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$$
$$= 2^2 + 1^2$$
$$= 4 + 1$$
$$|CA| = \sqrt{5}$$

O hâlde $b = \sqrt{5}$ birimdir.

ÖRNEK

Yandaki ABC dik üçgeninde
$m(\widehat{ACB}) = 90°$
$|CA| = 6$ birim
$|AB| = 8$ birim
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç birimdir? Bulalım.



Çözüm : ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve x uzunluğunu bulalım.

$$|CA|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$
$$6^2 + x^2 = 8^2$$
$$x^2 = 64 - 36$$
$$= 28$$
$$x = 2\sqrt{7}$$

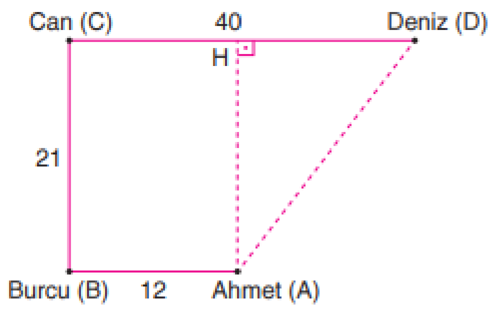
Örnek : Dört arkadaşın düz bir alandaki konumlarıyla ilgili olarak aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

• Burcu, Ahmet'in 12 m batısındadır.

• Can, Burcu'nun 21 m kuzeyindedir

. • Deniz, Can'ın 40 m doğusundadır. Buna göre Ahmet ile Deniz arasındaki en kısa uzaklığı hesaplayalım.

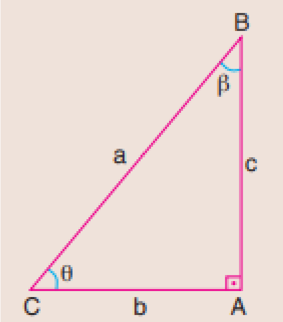
Çözüm : Verilen bilgileri aşağıdaki gibi modelleyelim. A noktasından $|CD|$ doğru parçasına $|AH|$ dikmesini çizelim.



AHD dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla AD uzaklığını hesaplayalım.

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |HD|^2$$
$$|AD|^2 = |AH|^2 + (|CD| - |CH|)^2 \Rightarrow |AD|^2 = 21^2 + (40 - 12)^2$$
$$= 21^2 + 28^2$$
$$= (7 \cdot 3)^2 + (7 \cdot 4)^2$$
$$= 7^2 \cdot 3^2 + 7^2 \cdot 4^2$$
$$= 7^2(3^2 + 4^2)$$
$$= 7^2 \cdot 25$$
$$= 7^2 \cdot 5^2$$
$$|AD| = 7 \cdot 5$$
$$= 35 \text{ m}$$

Dik Üçgende Trigonometrik Oranlarla İlgili Problemler



- Bir dik üçgende bir θ dar açısının sinüs değeri, açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\sin\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\sin\theta = \frac{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının kosinüs değeri, açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\cos\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\cos\theta = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının tanjant değeri, açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\tan\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\tan\theta = \frac{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının kotanjant değeri, açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\cot\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\cot\theta = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$

SIRA SİZDE

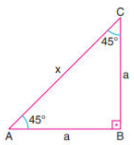
- Yukarıda verilen şekle göre aşağıdaki ifadeleri tamamlayınız.

a. $\sin\beta =$ ——　　**b.** $\cos\beta =$ ——

c. $\tan\beta =$ ——　　**ç.** $\cot\beta =$ ——

ÖRNEK

Bir ikizkenar dik üçgen yardımıyla 45° nin trigonometrik oranlarını yazalım.



Çözüm

Yandaki ABC ikizkenar dik üçgeninin [AB] ve [BC] dik kenarların uzunlukları a birimdir. Bu üçgende Pisagor bağıntısını yazalım ve $|CA| = x$ uzunluğunu bulalım.

$$|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2}a$$
$$|CA| = x = \sqrt{2}a \text{ birimdir.}$$

$m(\widehat{CAB}) = 45°$ nin trigonometrik oranlarını yazalım.

$$\sin 45° = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{a} = 1$$

ÖRNEK

Bir dar açının ölçüsü β olmak üzere $\tan\beta = \frac{7}{24}$ tür. Buna göre β nın diğer trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

Yandaki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = \beta$ olsun.

$\tan\beta = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{7}{24}$ tür. $|CA| = 7$ birim ve $|BC| = 24$ birim alabiliriz. ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve üçgenin AB kenarının uzunluğunu hesaplayalım.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$
$$|AB| = 25 \text{ birim}$$

Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

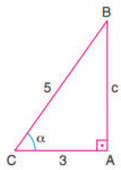
$$\sin\beta = \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{7}{25}$$

$$\cos\beta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{24}{25}$$

$$\cot\beta = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{24}{7}$$

ÖRNEK

Bir dar açının ölçüsü α olmak üzere $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ olduğuna göre verilen açının diğer trigonometrik oranlarını bulalım.



Çözüm

Yandaki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{C}) = \alpha$ olsun.

$\cos\alpha = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{3}{5} \Rightarrow |CA| = 3$ birim, $|BC| = 5$ birim ve $|AB| = c$ birim olsun.

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve üçgenin AB kenarının uzunluğunu bulalım.

$$|BC|^2 = |CA|^2 + |AB|^2$$
$$25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

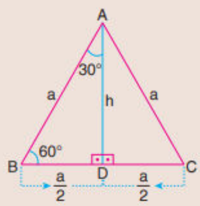
$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

ÖZEL AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLAR

Bir kenarının uzunluğu a birim olan ABC eşkenar üçgenini ve [AD] yüksekliğini çizelim.



- ABD dik üçgeninde $|BD|^2 + |DA|^2 = |AB|^2$ dir.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

- $m(\widehat{DAB}) = 30°$ ve $m(\widehat{B}) = 60°$ dir.

- $\sin 60° = \frac{|DA|}{|AB|} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos 60° = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

- $\tan 60° = \frac{|DA|}{|BD|} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$

- $\cot 60° = \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- $\sin 30° = \dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$

- $\cos 30° = \dfrac{|DA|}{|AB|} = \dfrac{h}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\tan 30° = \dfrac{|BD|}{|DA|} = \dfrac{\frac{a}{2}}{h} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- $\cot 30° = \dfrac{|DA|}{|BD|} = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \dfrac{2}{a} = \sqrt{3}$

NOT : 30° lik ve 60° lik açıların elde ettiğimiz trigonometrik oranlarına göre aşağıdaki ifadeyi söyleyebiliriz. Açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olan bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına, 60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir.

ÖRNEK

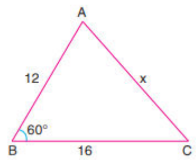
Yanda verilen ABC üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) = 60°$

$|AB| = 12$ birim

$|BC| = 16$ birim

olduğuna göre $|CA| = x$ kaç birimdir? Bulalım.

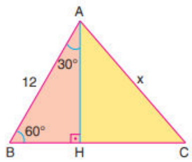


Çözüm

ABC üçgeninin $[AH]$ yüksekliğini çizelim.

ABH üçgeninin açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olur.

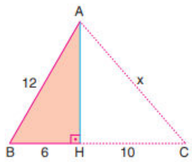
"Bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir." önermesi gereğince



$$|BH| = \frac{|AB|}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

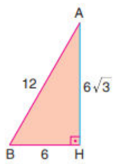
$|BH| = 6$ birim olur. Buna göre

$|HC| = 16 - 6 = 10$ birim olur.



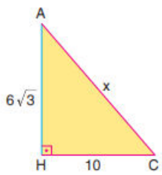
"Bir dik üçgende 60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır." önermesi gereğince

$$|AH| = \sqrt{3} \cdot |BH| = \sqrt{3} \cdot 6 = 6\sqrt{3}$$



AHC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve $|CA| = x$ değerini bulalım.

$$|CA|^2 = x^2 = |AH|^2 + |HC|^2$$
$$= (6\sqrt{3})^2 + (10)^2$$
$$= 108 + 100$$
$$= 208$$
$$x = 4\sqrt{13}$$



O hâlde $|CA| = x = 4\sqrt{13}$ birimdir.

ÖRNEK

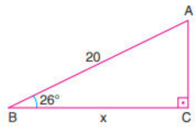
Yanda verilen ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{BCA}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 26°$

$|AB| = 20$ birim

olduğuna göre $|BC| = x$ yaklaşık kaç birimdir? Bulalım $(\cos 26° \approx 0,9)$.



Çözüm

ABC dik üçgeninde,

$$\cos 26° = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow 0,9 \approx \frac{x}{20} \Rightarrow x \approx 18 \text{ birimdir.}$$